Centro Federal de Educação Tecnológica
de Minas Gerais

Curso Pró-Técnico

Disciplina:

MATEMÁTICA

André Rodrigues Monticeli
Michael Ferreira
Nilton César da Silva

Varginha - Minas Gerais
2017

Sumário

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Conceitos primitivos

Um conjunto é uma coleção não-ordenada de objetos, a ordem na qual os elementos são escritos não importa; portanto {violeta, mostarda, vermelho}, denota o mesmo conjunto que {mostarda, vermelho, violeta}. Além disso, cada elemento de um conjunto é listado apenas uma vez; seria redundante listá-los mais do que uma única vez.

Usamos letras maiúsculas para denotarem conjuntos e o símbolo $\in$ para denotar que um elemento pertence ao conjunto. Portanto, $a \in A$ significa que a é um elemento, ou membro, do conjunto A e $b \notin A$ significa que o objeto b não é um elemento do conjunto A. Usamos chaves para indicar conjuntos.

Exemplo 1.1

$A = \{1, 2, 3\}$

Dois conjuntos são **iguais** se contêm os mesmos elementos. (Em uma definição, "se" significa, na verdade, "se, e somente se", portanto dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles contêm os mesmos elementos.)

Exemplo 1.2

Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 1\}$, então, $A = B$.

Podemos representar um conjunto por meio de uma **propriedade**.

Exemplo 1.3

Sendo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., 10, 11, ...\}$ o conjunto dos números naturais, quais são os elementos do conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / 2x + 5 \leq 17\}$?

$$2x + 5 \leq 17 \Rightarrow 2x \leq 17 - 5 \Rightarrow 2x \leq 12 \Rightarrow x \leq 6$$

Tem-se então que $x \leq 6$ e, portanto, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Podemos notar que, primeiramente o conjunto A foi representado por uma propriedade, que nos levou a descrever todos os elementos do referido conjunto. Também destacamos que o conjunto $\mathbb{N}$, neste exemplo, é chamado de **conjunto universo**.

Um conjunto universo é o conjunto ao qual pertencem todos os elementos que podemos utilizar no problema.

Exemplo 1.4

Quais são os elementos do conjunto $B = \{x \in \mathbb{N}/x + 2 \leq 1\}$?

$$x + 2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 1 - 2 \Rightarrow x \leq -1$$

Podemos reparar que não há $x \in \mathbb{N}$ que satisfaz a propriedade, logo o conjunto B não possui nenhum elemento. Denominamos tal conjunto de **conjunto vazio** e denotamos por $\{\ \ \}$ ou $\oslash$.

1.2 Conjuntos numéricos

1.2.1 Conjunto dos números naturais

Chama-se conjunto dos números naturais o conjunto formado pelos números $0, 1, 2, 3, ...$ e denotamos por $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

1.2.2 Conjunto dos números inteiros

Chama-se conjunto dos números inteiros o conjunto formado pelos números $..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ e denotamos por $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

1.2.3 Conjunto dos números racionais

Chama-se conjunto dos números racionais o conjunto formado pelos números que podem ser expressos por $\dfrac{a}{b}$ onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Iremos denotar o conjunto por $\mathcal{Q}$.

Exemplo 1.5

Os números $\dfrac{-5}{1} = -5$, $\dfrac{2}{5} = 0,4$ e $\dfrac{-1}{3} = -0,3333...$ são exemplos de números racionais.

Destacamos que o número $\dfrac{2}{5} = 0,4$ é chamado de **decimal exato**. Já o número $\dfrac{-1}{3} = -0,3333...$, chamamos de **dízima periódica**.

Exemplo 1.6

Vamos obter uma representação decimal para os números:

a) $\dfrac{3}{16}$ b) $\dfrac{4}{9}$

Dividindo 3 por 16 obtemos $0,1875$ que é a representação decimal do número $\frac{3}{16}$. Já a divisão de 4 por 9 obtemos $0,4444...$ que é a representação decimal do número $\frac{4}{9}$.

Uma vez entendido o exemplo acima, é fácil concluir que todo número racional pode ser expresso por um decimal exato ou por uma dízima periódica.

Exemplo 1.7

Queremos representar os seguintes números por frações, essas frações são chamadas de frações geratrizes:

a) $-1,234 = -\frac{1234}{1000}$

b) $5,644444... = \frac{564-56}{90} = \frac{508}{90}$

c) $5,645454545... = \frac{5645-56}{990} = \frac{5589}{990}$

Com estes exemplos, podemos perceber que toda dízima periódica é um número racional. Existem dízimas não-periódica. Essas dízimas são os números irracionais.

1.2.4 Conjunto dos números irracionais

O conjunto será denotado por $\mathbb{I}$. O conjunto dos números irracionais é constituído pelas dízimas não-periódicas. Como exemplos de números irracionais, podemos citar:

$\pi = 3,1415926535...$

$\sqrt{2} = 1,4142135623...$

$\sqrt{3} = 1,7320508075...$

1.2.5 Conjunto dos números reais

A reunião do conjunto dos números irracionais com o dos racionais é o conjunto dos números reais que denotamos por $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathcal{Q} \cup \mathbb{I}$$

Os conjuntos numéricos podem ser representados esquematicamente pela Figura 1.1

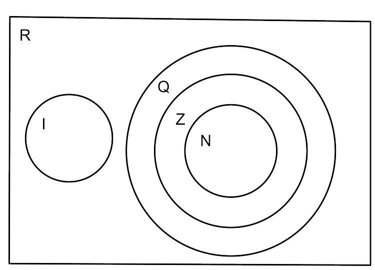


Figura 1.1: Representação dos conjuntos numéricos.

1.3 Aritmética dos inteiros

Nesta seção, vamos relembrar como escrever um número inteiro na sua forma fatorada, calcular o Mínimo Múltiplo Comum e o Máximo Divisor Comum entre números inteiros. Vejamos estes conceitos por meio de exemplos.

Exemplo 1.8

Qual a forma fatorada de 528?
Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 528 & 2 \\ 264 & 2 \\ 132 & 2 \\ 66 & 2 \quad \Rightarrow 2^4.3^1.11^1 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Exemplo 1.9

Quantos divisores possui o número 528?
Resolução:

A forma fatorada do número 528 é $2^4.3^1.11^1$ como vimos no exemplo anterior. Portanto, para encontrarmos o número de divisores de 528 vamos proceder da seguinte forma: $(4+1).(1+1).(1+1) = 5.2.2 = 20$ divisores positivos.

Sendo $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$..., $p_n^{\alpha_n}$ a forma fatorada de um número natural n, pode-se concluir que o número de divisores positivos de n é $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_n + 1)$.

Exemplo 1.10

Qual é o mínimo múltiplo comum entre os números 20 e 55?
Resolução:

$$\begin{array}{rr|l} 20, & 55 & 2 \\ 10, & 55 & 2 \\ 5, & 55 & 5 \quad \Rightarrow 2.2.5.11 = 220 \\ 1, & 11 & 11 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

Portanto, $\text{mmc}(20, 55) = 220$.

Exemplo 1.11

Qual é o máximo divisor comum entre os números 20 e 60?
Resolução:

$$\begin{array}{rr|l} 20, & 60 & 2 \\ 10, & 30 & 2 \\ 5, & 15 & 3 \quad \Rightarrow 2.2.5 = 20 \\ 5, & 5 & 5 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

Portanto, $\text{mdc}(20, 60) = 20$.

Podemos resolver muitos problemas utilizando o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum de números inteiros, como vamos apresentar nos dois exemplos a seguir:

Exemplo 1.12

De um aeroporto, partem todos os dias, 3 aviões que fazem rotas internacionais. O primeiro avião faz a rota de ida e volta em 4 dias, o segundo em 5 dias e o terceiro em 10 dias. Se num certo dia os três aviões partem simultaneamente, depois de quantos dias esses aviões partirão novamente no mesmo dia?

Resolução:

Para resolvermos esse problema, basta encontrar o $\text{mmc}(3, 4, 5, 10)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3, & 4, & 5, & 10 & 2 \\ 3, & 2, & 5, & 5 & 2 \\ 3, & 1, & 5, & 5 & 3 \quad \Rightarrow 2.2.3.5 = 60 \\ 1, & 1, & 5, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & 1 & \end{array}$$

Portanto, esses aviões partirão novamente no mesmo dia daqui 60 dias.

Exemplo 1.13

Um terreno retangular de 221 m por 117 m será cercado. Em toda a volta deste cercado serão plantadas árvores igualmente espaçadas. Qual o maior espaço possível entre as árvores?

Resolução:

Neste problema, queremos dividir no maior número possível, então basta encontrarmos o $\text{mdc}(221, 117)$.

$$\begin{array}{cc|l} 221, & 117 & 3 \\ 221, & 39 & 3 \\ 221 & 13 & 13 \quad \Rightarrow 13 \\ 17 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Portanto, o maior espaço possível entre as árvores será 13 m.

Observação: Dois números inteiros quaisquer são ditos **primos entre si** se, e somente se, o seu mdc for 1, ou seja, se o único divisor comum entre eles for o 1. Por exemplo, 6 e 25 são números primos entre si.

Exercícios

Exercício 1.1

Descreva cada um dos seguintes conjuntos, listando seus elementos.
a) $\{x|\ x\ \text{ é um inteiro e } 3 < x \leq 7\}$
b) $\{x|\ x\ \text{ é um mês com exatamente 30 dias}\}$
c) $\{x \in \mathbb{N} \mid -4x + 3 = 0\}$

Exercício 1.2

Escreva em decimal os seguintes números fracionários:
a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{45}{4}$ c) $\frac{8}{5}$ d) $\frac{2}{9}$

Exercício 1.3

Transforme em fração geratriz:
a) $0,012$ b) $1,1222...$ c) $3,444...$ d) $5,32424...$

Exercício 1.4

Duas pessoas, fazendo seus exercícios diários, partem de um mesmo ponto e contornam, andando, uma pista oval que circula um jardim. Uma dessas pessoas, andando de forma mais acelerada, dá uma volta completa na pista em 12 min, enquanto a outra, andando mais devagar, leva 20 min para completar a volta. Depois de quantos minutos essas duas pessoas voltarão a se encontrar no ponto de partida?

Exercício 1.5

Três peças de tecido medem respectivamente, 180m, 252m e 324m. Pretende-se dividir em retalhos de igual comprimento. Qual deverá ser esse comprimento, de modo que o número de retalhos seja o menor possível? Em quantos pedaços as peças serão dividas?

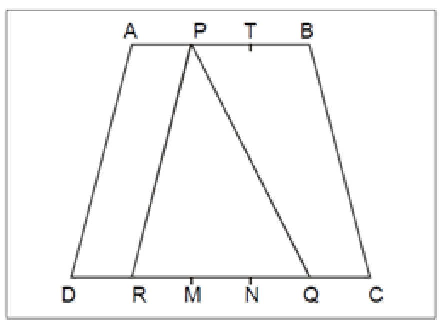
Testes

1) Num ponto de ônibus, passa um ônibus para a cidade de Rio das Quadras de 15 em 15 minutos e um ônibus para a cidade Tão Longe de 25 em 25 minutos. Se os dois ônibus passaram juntos às 7h30min, a que horas vão passar juntos novamente?
a) 7h45min
b) 9h10min
c) 8h45min
d) 9h30min

2) Num sítio temos uma rua de laranjeiras e, ao seu lado, uma rua de limoeiros. Os pés de laranja são plantados a cada 4 metros e os de limão, a cada 6 metros. No começo das ruas, foi plantado um pé de laranja em frente a um pé de limão. De quantos em quantos metros isso acontece?
a) 24
b) 12
c) 10
d) 2

3) João tinha 36 abacaxis, 60 abacates e 84 maçãs. Ele quer separá-los em caixas com a mesma quantidade de frutas, sem misturar os três tipos. Qual é o Maior número possível de frutas colocadas em cada caixa?
a) 12
b) 24
c) 1260
d)180

4) (CEFET-2008) No trapézio ABCD da figura abaixo, as bases AB e CD estão divididas em partes iguais.



Se a área do trapézio é S, então a área do triângulo PQR é
a) $\frac{3}{5}$S b) $\frac{5}{3}$S c) $\frac{3}{8}$S d) $\frac{5}{8}$S

5) (CEFET-2008) Num laboratório, foram realizadas misturas com os líquidos I (L_1) e II (L_2), obtendo-se as soluções S_1, S_2, S_3 e S_4 da seguinte forma:

- em S_1, foi usado somente L_1.
- em S_2, 90% de S_1 e 10% de L_2.
- em S_3, 90% de S_2 e 10% de L_2.
- em S_4, 90% de S_3 e 10% de L_2.

Desse modo, S_4 apresentará uma concentração de L_2 igual a
a) $25,6\%$
b) $27,1\%$
c) $32,4\%$
d) $35,8\%$

6) (CEFET-2008) Nas operações com elementos do conjunto $\mathbb{Z}$, afirma-se:
I- O produto de dois números inteiros ímpares é ímpar.
II- Sejam n e m dois números inteiros, com $n > m$ e $m \neq 0$. Se $n : m = p$, então p é inteiro.
III- Se k é um número inteiro, então $k^2 + k$ é necessariamente múltiplo de 2.
IV- Se m e n, com $m \neq n$, são dois números primos entre si, então necessariamente m e n são primos.
V- Qualquer número inteiro escrito na forma $4n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$, é ímpar.
São FALSAS apenas as afirmativas
a) II e IV.
b) III e V.
c) I, II e IV.
d) II, III e IV.

7) (CEFET-2008) Na divisão de dois números inteiros e positivos, o quociente obtido é 18 e o resto é igual ao divisor menos 2 unidades. Sendo a diferença entre o dividendo e o divisor igual a 106, o resto é um número
a) primo
b) ímpar
c) múltiplo de 2
d) par e maior que 8

8) (CEFET-2009) A um cliente de uma companhia telefônica foi oferecido o seguinte plano:

gratuidade em 10 horas de ligação por mês
R\$ $38,00$ pela assinatura mensal
R\$ $0,02$ por minuto que exceder as 10 horas

Considerando que o cliente contratou esse plano, e que o consumo foi de 17 horas e 23 minutos em outubro, e de 8 horas e 45 minutos em novembro, logo, sua despesa nos dois meses foi de
a) R\$ $84,86$
b) R\$ $95,36$
c) R\$ $96,86$
d) R\$ $107,36$

9) (CEFET-2009) Considere os conjuntos $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
O número $\dfrac{a^2 + b^2}{a - b}$, em que $a \in A$ e $b \in B$, NÃO pode ser
a) inteiro.
b) negativo.
c) positivo menor que 10.
d) positivo maior que 10.

Capítulo 2

Potenciação e Radiciação

2.1 Potenciação

Definição 2.1 *Dado um número real a e um número inteiro n, $n > 1$, chama-se* ***potência enésima*** *de a, que se indica por a^n, ao produto de n fatores iguais a a. Assim:*

$$a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{n fatores}$$

A seguir apresentamos alguns exemplos:

Exemplo 2.1

a) $2^3 = 2.2.2 = 8$

b) $(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = 8$

c) $(-3)^2 = (-3).(-3) = 9$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Observações:

1. $(-2)^2 \neq -2^2$, pois: $(-2)^2 = 4$ e $-2^2 = -4$;
2. $(-1)^n = 1$, se n é par e $(-1)^n = -1$, se n é ímpar;
3. $1^n = 1$;
4. $0^n = 0$, se $n \neq 0$;
5. $a^1 = a$;
6. $a^0 = 1$;
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, a \neq 0$.

2.1.1 Propriedades das potências

Para todo $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, m e n inteiros, temos:

P1. $a^m.a^n = a^{m+n}$

P2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$

P3. $(a^m)^n = a^{m.n}$

P4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

P5. $(a.b)^n = a^n.b^n$

Exemplo 2.2

a) $2^7.2^3 = 2^{7+3} = 2^{10}$

b) $2^7.2^3.2^{-2} = 2^{7+3+(-2)} = 2^8$

c) $\dfrac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$

d) $(2^5)^3 = 2^{5.3} = 2^{15}$

Exemplo 2.3

Calcular:

a) $\dfrac{(5^3.5^7)^2}{5^{18}} = \dfrac{(5^{10})^2}{5^{18}} = \dfrac{5^{20}}{5^{18}} = 5^2 = 25$

b) $\dfrac{(10^{-1})^3.10^{-7}}{10^{-10}} = \dfrac{10^{-3}.10^{-7}}{10^{-10}} = \dfrac{10^{-10}}{10^{-10}} = 1$

c) $3^{2^3} = 3^{(2^3)} = 3^8 = 6561$

2.1.2 Notação científica

Um número escrito na notação científica corresponde ao produto de um número decimal de 1 a 10, excluído o 10, por uma potência de base 10.

Por exemplo, os números $2,6.10^6$ e 3.10^{-3} estão em notação científica.

Para se escrever um número em notação científica, podemos utilizar a seguinte ideia:

P1. quando deslocamos a vírgula para a **direita**, o expoente do 10 fica **negativo**.

P2. quando deslocamos a vírgula para a **esquerda**, o expoente do 10 fica **positivo**.

Exemplo 2.4

Vamos escrever os seguintes números em notação científica:
a) $17000000 = 1,7.10^7$ (deslocamos 7 casas decimais à esquerda)
b) $0,422 = 4,22.10^{-1}$ (deslocamos 1 casa decimal à direita)
c) $-60200 = -6,02.10^4$ (descolamos 4 casas decimais à esquerda)
d) $23,49 = 2,349.10^1$ (deslocamos 1 casa decimal à esquerda)

Exercícios

Exercício 2.1

Calcular:

$$a) 1^4 \qquad b) 4^3 \qquad c) -4^2 \qquad d) 0^4$$

$$e) (-4)^2 \qquad f) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad g) 4^2 \qquad h) -\left(\frac{-2}{3}\right)^2$$

$$i) 5^1 \qquad j) (-5)^1 \qquad k) \left(\frac{1}{5}\right)^1 \qquad l) \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$$

$$m) (-5)^0 \qquad n) (-5)^{-1} \qquad o) \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \qquad p) 5^{-1}$$

Exercício 2.2

Resolva:

a) $2^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

b) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{-1}{3}\right)^{-1}\right]$

Exercício 2.3

Calcular o valor de $\left(x^{-1} + y^{-1}\right)^{-1}$, sabendo que $x = 0,1$ e $y = 0,9$.

Exercício 2.4

Transformar cada expressão abaixo numa única potência de base 2.

$$a) 2^5.2^4.2^{-2} \qquad c) (2^3)^4 \qquad e) 8^4$$

$$b) \frac{2^6}{2} \qquad d) \frac{8^4}{2^{-2}} \qquad f) \frac{8^{-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}$$

Exercício 2.5

Transformar cada expressão abaixo em uma única potência de base 10.

$$a)10^3.100 \qquad b)(100)^2 : 10^3 \qquad c)10^{500}.\left(\frac{1}{100}\right)^{-200} \qquad d)10^{3^2}$$

Exercício 2.6

Calcule o valor de cada expressão:

a) $\dfrac{(0,001)^2.100^2}{0,1}$

b) $1000^3.(0,001)^2$

Exercício 2.7

A expressão $5^{200}.(0,2)^{199}$ é equivalente a:

a) 5

b) 10

c) $\dfrac{1}{5}$

d) $\dfrac{1}{10}$

e) 100

Exercício 2.8

Assinalar V (verdadeira) ou F (falsa):

a) (   ) $2^{x+3} = 8.2^x$

b) (   ) $2^{x-1} = \dfrac{2^x}{2}$

c) (   ) $(2x)^3 = 8x^3$

Exercício 2.9

Se $2,4^6 = a$ e $2,4^7 = b$, então $2,4^{17}$ é igual a:

a) $a + b$ b) $a.b$

c) $6a + 7b$ d) $a - b$

Exercício 2.10

Escreva em notação científica os números:

$a)230$ $\quad$ $c)0,2$ $\quad$ $e)-354,2$

$b)23$ $\quad$ $d)8000$ $\quad$ $f)0,01$

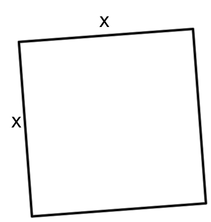
Exercício 2.11

No corpo de um recém-nascido há cerca de 26 bilhões de células, e no de um adulto há cerca de 50 trilhões de células. Escreva estes números em notação científica.

2.2 Radiciação

Para entendermos a ideia de radiciação, vamos observar as seguintes situações:

1) Um terreno quadrado tem $900m^2$ de área. Qual é a medida do seu lado?



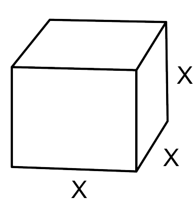
$$x^2 = 900$$

$$x = \sqrt{900}$$

$$x = 30$$

Logo, a medida de seu lado é $30m$.

2) Um reservatório de água tem a forma cúbica e sua capacidade é de 8 litros ($9m^3$). Quanto mede cada aresta desse reservatório?



$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8}$$

$$x = 2$$

Logo, a medida de cada aresta desse reservatório é $8m$.

Definição 2.2 *Sendo $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se:*

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a \quad e \quad b \geq 0$$

onde b é um número real chamado raiz enésima de a.

Exemplo 2.5

Usando a definição temos:
a)$\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 9$ e $3 \geq 0$.
b) $\sqrt[3]{64} = 4$, pois $4^3 = 64$ e $4 \geq 0$.
c) $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$, pois $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.

Observação: Existem dois valores de x que tornam verdadeira a sentença $x^2 = 25$: 5 e -5, pois, $5^2 = 25$ e $(-5)^2 = 25$. Também vale lembrar que, $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ se n for um número ímpar.

2.2.1 Propriedades dos radicais

P1. $\sqrt[n]{a^n} = a$
Exemplo: $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

P2. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$ e $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.r]{a^{m.r}}$, com $p \neq 0$ e p divisor comum de m e n.
Exemplos: $\sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4:2]{2^{6:2}} = \sqrt{2^3}$ e $\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3.2]{3^{2.2}} = \sqrt[6]{3^4}$

P3. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
Exemplo: $\sqrt[4]{6.7} = \sqrt[4]{6}.\sqrt[4]{7}$

P4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Exemplo: $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}$

P4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
Exemplo: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[3.4]{7} = \sqrt[12]{7}$

Podemos utilizar as propriedades para simplificar os radicais.

Exemplo 2.6

Simplificar os radicais:
a) $\sqrt[3]{320}$ b) $\sqrt{32}$

Resolução:

a) Fatorando o 320, temos:

$$\begin{array}{r|ll} 320 & 2\rceil & \\ 160 & 2| & 2 \\ 80 & 2\rfloor & \\ 40 & 2\rceil & \\ 20 & 2| & 2 \\ 10 & 2\rfloor & \\ 5 & 5 & \\ 1 & & \end{array}$$

Logo, $\sqrt[3]{320} = 2.2\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$.

b) Fatorando o 32, temos:

$$\begin{array}{r|ll} 32 & 2\rceil & \\ 16 & 2\rfloor & 2 \\ 8 & 2\rceil & \\ 4 & 2\rfloor & 2 \\ 2 & 2 & \\ 1 & & \end{array}$$

Logo, $\sqrt{32} = 2.2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

2.2.2 Racionalização de denominadores

Vejamos agora como podemos evitar a divisão por números irracionais, ou seja, por radicais.

Exemplo 2.7

Racionalizar o denominador de:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{7}} = \dfrac{5.\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}.\sqrt[3]{7^2}} = \dfrac{5\sqrt[3]{49}}{7}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{7}+2} = \dfrac{3}{\sqrt{7}+2}.\dfrac{(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}-2)} = \dfrac{3.(\sqrt{7}-2)}{7-4} = \dfrac{3.(\sqrt{7}-2)}{3} = \sqrt{7}-2$

2.2.3 Potência com expoente racional

Na seção anterior estudamos expressões da forma 10^2, 6^{-1} e 2^0, que são potências com expoente inteiro cujo significado já conhecemos.

Qual será, então, o significado de uma potência com expoente fracionário, como, por exemplo, a expressão $2^{\frac{3}{4}}$?

Logo, pode-se demonstrar que

$$2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{2^4}$$

Vejamos outros exemplos:

Exemplo 2.8

Escreva as potências como radicais:

a) $5^{\frac{6}{7}} = \sqrt[7]{5^6}$

b) $9^{0,4} = 9^{\frac{4}{10}} = 9^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{9^2}$

Exercícios

Exercício 2.12

Calcular, usando a definição, o valor de cada uma das raízes:

$a)\sqrt[1]{3}$	$b)\sqrt{25}$	$c)\sqrt[3]{8}$	$d)\sqrt[4]{16}$
$e)\sqrt[5]{1}$	$f)\sqrt[6]{0}$	$g)\sqrt{\dfrac{9}{4}}$	$h)\sqrt{0,16}$

Exercício 2.13

Obter a medida, em cm, do lado de um quadrado de área:
a) $36cm^2$ b) $64cm^3$ c) $81cm^2$

Exercício 2.14

Assinalar V (verdadeiro) ou F (falso)
a) ( ) $\sqrt{9} = 3$
b) ( ) $\sqrt{9} = -3$
c) ( ) $\sqrt{9} = \pm 3$
d) ( ) $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$
e) ( ) $x^3 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt[3]{8}$
f) ( ) $x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8}$

Exercício 2.15

Simplifique as expressões:

$a)\sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{3}$

$b)2\sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{2}$

$c)2\sqrt[5]{2}.6\sqrt[5]{3}$

$d)\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{5}$

$e)18\sqrt[3]{10} : 3\sqrt[3]{5}$

$f)\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$g)\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

$h)\sqrt{\frac{16}{9}}$

$i)\left(\sqrt[15]{2}\right)^5$

$j)\left(\sqrt[4]{3}\right)^8$

Exercício 2.16

Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{18}$

c) $\sqrt[3]{40}$

d) $\sqrt[3]{625}$

e) $\sqrt[4]{80}$

f) $\sqrt[5]{a^{13}}$

g) $\sqrt[3]{16a^5}$

h) $\sqrt{8a^3b^6c^9}$

i) $\sqrt[4]{160}$

Exercício 2.17

Efetue:

a) $3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$

b) $4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$

c) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{75} - \sqrt{27}$

d) $9\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{625}$

e) $5\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{64a^4}$ $(a \geq 0)$

Exercício 2.18

Torne racional o denominador das seguintes expressões:

a) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{20}{3\sqrt{10}}$

e) $\frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

f) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

g) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

h) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Exercício 2.19

Escreva na forma de radical cada uma das seguintes potências com expoente fracionário:

a) $5^{\frac{2}{3}}$

b) $3^{\frac{5}{7}}$

c) $6^{\frac{4}{3}}$

d) $7^{\frac{1}{2}}$

Capítulo 3

Técnicas de fatoração e sistemas de equações lineares

3.1 Técnicas de fatoração

3.1.1 Valor numérico

Quando, numa expressão algébrica, cada letra for substituída por um número e as eventuais operações puderem ser efetuadas, obter-se-á um resultado chamado de valor numérico da expressão algébrica.

Exemplo 3.1

Obter o valor numérico de $a^2 - b^2 + ab$, para:

a) $a = 1$ e $b = 2$

$$(1)^2 - (2)^2 + 1.2$$

$$1 - 4 + 2$$

$$-1$$

b) $a = 2$ e $b = 1$

$$(2)^2 - (1)^2 + 2.1$$

$$4 - 1 + 2$$

$$5$$

Exemplo 3.2

Mostrar que o valor numérico de $(a + 2)(ab + 1) - a(ab + 2b + 1)$ independe dos valores de a e b.

Resolução:

Efetuando os produtos indicados, obtemos:

$a^2b + a + 2ab + 2 - a^2b - 2ab - a = 2$

Portanto, para quaisquer valores de a e b, a expressão terá valor numérico 2.

Exercícios

Exercício 3.1

Sendo $a = 5$ e $b = 2$, obter os valores numéricos de:

a) $(a + b)^2$

b) $a^2 + b^2$

c) $(a - b)^2$

d) Mostrar que o valor numérico da expressão $(a + b)(ab + 1) - b(a^2 + ab + 1)$ não depende do valor de b.

3.1.2 Fatoração

Vejamos alguns casos de fatoração:

1^o **Caso: Fator Comum**

Pela propriedade distributiva, temos que $a(b + c) = ab + ac$ e portanto,

$$a.b + a.c = a(b + c)$$

Exemplo 3.3

Fatorar $2x + xy - ax$.

Resolução:

Como x é fator comum, segue que:

$2x + xy - ax = x(2 + y - a)$.

Exemplo 3.4

Fatorar $8x^2 - 4x$.

Resolução:

Como $4x$ é fator comum, segue que:

$8x^2 - 4x = 4x(2x - 1)$

Exemplo 3.5

Fatorar $ax + ay - bx - by$.

Resolução:

$$\begin{aligned} ax + ay - bx - by &= (ax + ay) - (bx + by) \\ &= a(x + y) - b(x + y) \\ &= (x + y)(a - b) \end{aligned}$$

Exercícios

Exercício 3.2

Fatore as seguintes expressões:

a) $a^2 + ab - a$

b) $a(x + y) + b(x + y)$

c) $ax - bx$

d) $x(a - b) + b - a$

e) $ab^2 - a^2b - a + b$

f) $x^2 - 3x + bx - 3b$

g) $ap - by + bp - ay$

h) $x^2 + ax + bx + ab$

i) $x^2 + (a - b)x - ab$

2^o Caso: Diferença de dois quadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemplo 3.6

Fatorar $x^2 - 25$.

Resolução:

$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$

Exemplo 3.7

Fatorar $a^4 - b^4$.

Resolução:

$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

Exercícios

Exercício 3.3

Fatorar as seguintes expressões em $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 1$

b) $x^4 - 1$

c) $a^2 - b^2 + ax + bx$

d) $a + b + b^2 - a^2$

e) $a^2 - b^2 + b - a$

f) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

3^o Caso: Trinômio quadrado perfeito

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

e

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Exemplo 3.8

Desenvolver $(2x + 3y^2)^2$.

Resolução:

$(2x + 3y^2)^2 = (2x)^2 + 2.(2x).(3y^2) + (3y^2)^2 = 4x^2 + 12xy^2 + 9y^4$

Exemplo 3.9

Desenvolver $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$

Resolução:

$\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2.(x).\left(\dfrac{1}{x}\right) + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$

Exemplo 3.10

Fatorar $a^2 + 10ab + 25b^2$.

Resolução:

$a^2 + 10ab + 25b^2 = (a)^2 + 2.(a).(5b) + (5b)^2 = (a + 5b)^2$

Exercícios

Exercício 3.4

O valor numérico de $2x^3 - x^3 - 3x$, para $x = -2$ é:
a) -10
b) -14
c) -6
d) 18

Exercício 3.5

Efetue:

a) $(x + y)^2 =$

b) $(a + 3)^2 =$

c) $(5x + 2)^2 =$

d) $(x^2 + \frac{x}{2})^2 =$

e) $(-3 + 4x)^2 =$

Exercício 3.6

Fatorando $a^2b^2 - 2abc + c^2$, obtemos:
a) $(ab - c)^2$
b) $a^2b^2 - c^2$
c) $(ab - c)(ab + c)$
d) $ab(ab - 2c)$

Exercício 3.7

Fatore:

a) $4x^2 + 16x + 16$
b) $ax - x + ab - b$
c) $a^2 + ab + ax + bx$
d) $xy + cx - ay - ac$
e) $ab - cb + ad - cd$

Exercício 3.8

O valor da expressão $ax + ay + bx + by$, onde $a + b = 15$ e $x + y = 6$, é:

a) 21

b) 180

c) 60

d) 90

Exercício 3.9

Simplificando a expressão $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$, obtemos:

a) $\dfrac{x + 3}{x - 3}$

b) $x + 3$

c) $\dfrac{x - 3}{x + 3}$

d) $x - 3$

Exercício 3.10

Simplificando a expressão $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$, obtemos:

a) $x + y$

b) $x - y$

c) $\dfrac{x - y}{x + y}$

d) $\dfrac{x + y}{x - y}$

Exercício 3.11

Fatore:

a) $x^2 - 4x + 4 + 3(x - 2)(x + 1)$

b) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$

c) $3xy + 3 - x - 9y$

d) $9x^2 - 12x + 4$

e) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$

f) $144 - h^2$

Exercício 3.12

Se $x^2 + y^2 = 1681$ e $x.y = 360$, o valor de $x + y$ é:
a) 49
b) 2041
c) 720
d) 60

Exercício 3.13

O valor da expressão $x^2y + xy^2$, onde $x.y = 12$ e $x + y = 8$ é:
a) 20
b) 48
c) 96
d) 100

Exercício 3.14

(CEFET-2010) Se $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 = 3$, então, $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ é igual a:
a) 0
b) 1
c) 5
d) 6

3.2 Sistemas de equações lineares

Para resolver um sistema de equações lineares, vamos apresentar dois métodos: método da adição e o método da substituição.

Método da adição:

Consideremos o seguinte sistema de equações. Aplicando o método da adição temos:

$$\begin{cases} 2x + y &= 10 \\ x - y &= 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x &= 18 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Logo,

$$x - y = 8 \Rightarrow 6 - y = 8 \Rightarrow y = -2$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é $\{(6, -2)\}$.

Método da substituição:

Consideremos o mesmo sistema de equações visto no método da adição. Assim, pelo método da substituição, vamos proceder da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2x + y &= 10 \\ x - y &= 8 \quad \rightarrow x = 8 + y \end{cases}$$

Logo, substituindo na primeira equação temos,

$$2x + y = 10$$

$$2(8 + y) + y = 10$$

$$16 + 2y + y = 10$$

$$3y = 10 - 16$$

$$y = -2$$

E voltando na equação $x = 8 + y$, obtemos

$$x = 8 + (-2) \Rightarrow x = 6$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é $\{(6, -2)\}$.

Nesta apostila, apenas apresentamos um exemplo de cada método, com o intuito de relembrar o processo. Nos testes a seguir, teremos a oportunidade de aplicar estes métodos na resolução de alguns problemas.

Testes

1) (CEFET/MG-2010) Na prevenção da gripe suína está sendo muito usada uma solução com 70% de álcool e 30% de água, cuja concentração é de 70%. Um laboratório desenvolve duas soluções da seguinte maneira:

- S_1 com 60% do princípio ativo P;
- S_2 com 80% de S_1 e 20% de P.

Dessa forma, S_2 tem uma concentração percentual de, aproximadamente,

a) 68

b) 78

c) 88

d) 98

2) (CEFET/MG-2010) Segundo as estimativas do IBGE, em 2009 o Brasil tem, aproximadamente, 190 milhões de habitantes espalhados pelas suas 27 unidades da federação e 5565 municípios. A tabela seguinte mostra o número aproximado de habitantes em algumas capitais brasileiras.

Capitais	Habitantes
Belo Horizonte	2 400 000
Brasília	2 600 000
Rio de Janeiro	6 000 000
São Paulo	11 000 000

Com base nesses dados, é correto afirmar que, aproximadamente, ... habitantes estão distribuídos em ....

A opção que completa, corretamente, as lacunas acima é

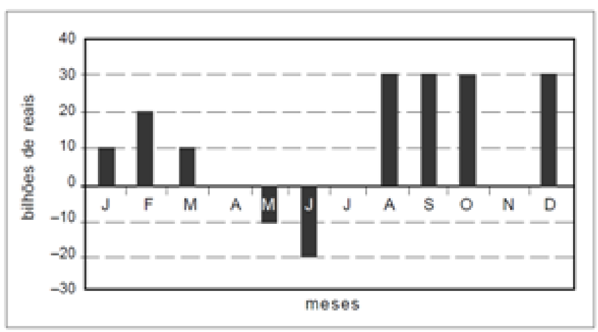
a) $1,68.10^8$, 5561 municípios.

b) $2,45.10^7$, 5561 municípios.

c) $7,52.10^6$, Belo Horizonte e Brasília.

d) $7,10.10^6$, Belo Horizonte e São Paulo.

3) (CEFET/MG-2010) O gráfico, a seguir, representa o faturamento mensal correspondente ao total de ganho menos o total de gastos de uma indústria automobilística.



Analisando esse gráfico, é correto afirmar que o faturamento da empresa

a) foi negativo no primeiro semestre.

b) foi negativo em março e nulo em novembro.

c) mateve-se constante entre junho e setembro.

d) diminuiu entre os meses de fevereiro e março.

4) (CEFET/MG-2010) Para realizar uma dinâmica em uma aula de Matemática, a classe foi dividida em grupos de 7 participantes, e um deles deveria ser o líder. Como o grupo de José teve dificuldade para fazer essa escolha, ele propôs as seguintes etapas:

1. Identificar-se com a letra A e aos seus colegas com as letras B, C, D, E, F e G.

2. Pedir ao professor que escolhesse um número inteiro n maior ou igual a 2131 e menor ou igual a 2136.

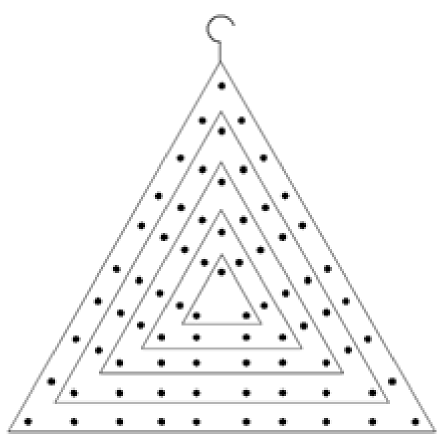
3. Iniciar a contagem de 1 até n, associando 1 para o aluno identificado com B, 2 para C e, assim por diante, até chegar a ele mesmo, identificado com A. Depois continuar a contagem, recomeçando pelo B e, assim por diante, até se chegar ao número n.

4. Tornar-se-á líder o aluno associado a n.

Considerando essa situação, é INCORRETO afirmar que
a) o aluno A poderá ser o líder.
b) o aluno C jamais será líder.
c) o líder será o aluno D, se $n = 2132$.
d) o líder será o aluno F, se $n = 2133$.

5) (CEFET/MG-2009) Considere o número real a, tal que $0 < a < 1$. Entre os números abaixo, o maior que a é
a) a^3
b) $0,8a$
c) a^2
d) $\sqrt{a}$

6) (CEFET/MG-2009) Um artesão, ao criar um brinco, corta de uma chapa de metal cinco triângulos eqüiláteros, de tamanhos diferentes que são fixados um sobre o outro, do maior para o menor, ficando igualmente espaçados. Para melhorar o seu acabamento, colam-se pedras de "strass"nas laterais dos triângulos, conforme a figura.



Sabendo-se que a quantidade de "strass"em cada lado é proporcional ao seu tamanho e que o lado menor mede $1cm$, é correto afirmar que a soma dos comprimentos de todos os lados é
a) 42
b) 45
c) 48
d) 51

7) (CEFET/MG-2008) Seja $x + y = -2$ e $3x - 2y = 19$, logo o valor de $\dfrac{(y-x)^6}{(3x+y)^{-4}}$ é:

a) 226

b) 326

c) -326

d) -226

8) (CEFET/MG-2008) No balcão de uma lanchonete, a diferença entre a quantidade de pães de queijo e o de coxinhas é 6, e o produto entre o número de pastéis e o de pães de queijo é 720. Se o total de unidades desses três salgados é 72, e o número de pães de queijo é maior que 20, pode-se afirmar que a quantidade de coxinhas é

a) 16

b) 18

c) 20

d) 22

9) (CEFET/MG-2008) Num reservatório com 280 litros de água, foram acrescentados 3/20 de sua capacidade. Se ainda faltam 57% para encher totalmente esse reservatório, então a quinta parte do restante, em litros, é igual a

a) 114

b) 116

c) 118

d) 120

10) (CEFET/MG-2008) Considere a fração $\dfrac{n}{m}$. Se o numerador dessa fração for aumentado de uma unidade e o denominador diminuído de duas unidades, a nova fração obtida será igual a 1. E, se o denominador for aumentado de duas unidades e o numerador for subtraído de três, a fração será igual a 1/3. Nessas condições, o valor de $(m-n)^{n-m}$, será

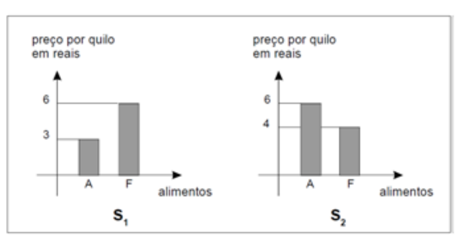
a) -27

b) 1/27

c) 1/4

d) 4

11) (CEFET/MG-2009) Os preços do arroz (A) e feijão (F), nos supermercados S_1 e S_2, estão discriminados nos seguintes gráficos:



Nos supermercados S_1 e S_2, as embalagens de arroz e feijão são sempre de um quilo. Um consumidor X foi a S_1 e gastou $R\$ \ 30,00$, comprando arroz e feijão. Já o consumidor Y teve uma despesa de $R\$ \ 36,00$, adquirindo a mesma quantidade de cada produto em S_2. Assim sendo, o total de alimentos, em kg, que cada um comprou é

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

12) (CEFET/MG-2009) Considere a seqüência abaixo:

$1.9 + 2 = 11$

$12.9 + 3 = 111$

$123.9 + 4 = 1\ 111$

....

....

....

Nessas condições, o número 1 111 111 111 pode ser escrito da forma

a) $123456.9 + 7$

b) $1234567.9 + 8$

c) $12345678.9 + 9$

d) $123456789.9 + 10$

Capítulo 4

Equações do 2^O grau

4.1 Definições

Denomina-se equação do 2^o grau na incógnita x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$.

Exemplo 4.1

$2x^2 + 2x - 40 = 0$ é uma equação do 2^o grau, onde $a = 2, b = 2, c = -40$.

$6x^2 - 9x = 0$ é uma equação do 2^o grau, onde $a = 6, b = -9, c = 0$.

$x^2 - 25 = 0$ é uma equação do 2^o grau, onde $a = 1, b = 0, c = -25$.

Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação se diz completa. Como exemplo temos a primeira equação do Exemplo 4.1.

Quando $b = 0$ e/ou $c = 0$, a equação se diz incompleta, conforme as duas últimas equações do Exemplo 4.1.

4.2 Resolvendo equações do 2^o grau

Resolver uma equação do 2^o grau, é o mesmo que encontrar suas raízes. Quando uma equação do 2^o grau for incompleta, usaremos a fatoração para resolver. Vejamos:

Exemplo 4.2

Resolver a equação $x^2 - 9x = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$.

Resolução:

$$x^2 - 9x = 0$$

$$x(x - 9) = 0$$

Ou $x = 0$ ou $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$.

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{0, 9\}$, e os números 0 e 9 são as raízes da equação.

Exemplo 4.3

Resolver a equação $3x^2 - 60 = 0$.

Resolução:

$$3x^2 - 60 = 0$$

$$3x^2 = 60$$

$$x^2 = \frac{60}{3}$$

$$x^2 = 20$$

$$x = \pm\sqrt{20}$$

$$x = \pm 2\sqrt{5}$$

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{\pm 2\sqrt{5}\}$, e os números $-2\sqrt{5}$ e $+2\sqrt{5}$ são as raízes da equação.

Exemplo 4.4

Determinar a solução da equação $x^2 + 4 = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$.

Resolução:

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

Como $\sqrt{-4}$ não existe no conjunto $\mathbb{R}$, não temos os valores reais para x. Logo, $S = \oslash$ e a equação não tem raízes reais.

Nestes exemplos, resolvemos equações do 2^o grau incompletas. Para resolvermos uma equação do 2^o grau completa, usaremos a fórmula de Bhaskara.

4.2.1 Resolução pela fórmula de Bhaskara

Pode-se provar que, para encontrarmos as raízes da equação do 2^o grau pela fórmula de Bhaskara, utiliza-se as seguintes equações:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou, chamando $\Delta = b^2 - 4ac$, temos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Observações

- Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas.
- Se $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais iguais.
- Se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.

Exemplo 4.5

Resolver a equação $x^2 + 2x - 8 = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$.

Resolução:

Nessa equação temos: $a = 1, b = 2, c = -8$. Assim,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4.(1).(-8) = 36$$

Logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{36}}{2.(1)} = \frac{-2 \pm 6}{2} \left\langle \begin{array}{l} x' = \dfrac{-2+6}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \\ x'' = \dfrac{-2-6}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \end{array} \right.$$

Então, $S = \{-4, 2\}$.

4.2.2 Soma e Produto

Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, e sejam x' e x'' as raízes reais dessa equação. Entre as raízes x' e x'' e os coeficientes a, b, c da equação, existem duas relações importantes:

1. $x' + x'' = \dfrac{-b}{a}$ (Soma das raízes)
2. $x'.x'' = \dfrac{c}{a}$ (Produto das raízes)

Vamos usar estas relações para resolvermos alguns problemas.

Exemplo 4.6

Determinar o valor de m na equação $12x^2 - mx - 1 = 0$, de modo que a soma das raízes dessa equação seja $\dfrac{5}{6}$.

Resolução:

Pela equação temos, $a = 12, b = -m, c = -1$.

De acordo com a relação da soma, podemos escrever:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-m)}{12} = \frac{m}{12}$$

Então temos,

$$\frac{m}{12} = \frac{5}{6}$$

$$6m = 60$$

$$m = 10$$

Exemplo 4.7

Encontre as raízes da equação $x^2 - x - 20 = 0$, utilizando a relação da soma e do produto das suas raízes.

Resolução:

Nessa equação temos: $a = 1, b = -1, c = -20$. Então,

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{1} = 1$$

$$x'.x'' = \frac{c}{a} = \frac{-20}{1} = -20$$

Assim, temos que encontrar dois números que somados dê 1 e multiplicados dê -20. Logo, esses números são, -4 e 5.

Portanto, as raízes da equação são -4 e 5.

4.2.3 Resolvendo equações biquadradas

Denomina-se equação biquadrada, na incógnita x, toda equação da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$.

Exemplo 4.8

Resolver a equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Resolução:

Primeiramente, substituímos

$$x^2 = y$$

Então temos, uma nova equação que é do 2^o grau

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

Resolvendo essa equação pela fórmula de Bhaskara, temos:

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Assim, $y' = 4$ e $y'' = 1$.

Em seguida, vamos substituir os valores de y na equação $x^2 = y$ para obtermos os valores de x.

- $y = 4$: $\quad x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

- $y = 1$: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$

Portanto, as raízes da equação biquadrada são, $-2, -1, 1, 2$.

Exercícios

Exercício 4.1

Resolva as seguintes equações:

$$\begin{array}{lll} a)4x^2 - 100 = 0 & b)3x^2 + 48 = 0 & c) - 2x^2 + 64 = 0 \\ d)5x^2 - 3x = 0 & e)7x^2 - 35x = 0 & f)x^2 - x = 0 \\ g)x^2 + 6x + 8 = 0 & h)x^2 - 10x - 11 = 0 & i)9x^2 + 6x - 48 = 0 \\ j)x^2 - 14x + 50 = 0 & k)x^2 - 16x + 64 = 0 & l)x^2 - 6x + 5 = 0 \end{array}$$

Exercício 4.2

Determine o valor de m para que a equação $x^2 - (m+1)x - 28 = 0$ tenha duas raízes cuja soma seja igual a -3.

Exercício 4.3

Utilizando a relação de soma e produto das raízes de uma equação do 2^o grau, resolva:

$$\begin{array}{lll} a)x^2 + 3x - 10 = 0 & b)x^2 - 5x + 4 = 0 & c)x\ 2 + 3x + 2 = 0 \\ d)x^2 + 4x + 4 = 0 & e)x^2 - x - 6 = 0 & f)x^2 - 5x + 6 = 0 \end{array}$$

Exercício 4.4

Resolva as equações biquadradas em $\mathbb{R}$:

a) $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$

Exercício 4.5

(CEFET/MG-2008) Sabendo-se que as medidas dos lados de um triângulo ABC são $5cm, 8cm$ e uma das raízes da equação $3x^2 - 17x + 22 = 0$ (em cm), então seu perímetro vale

a) 2

b) $\frac{11}{3}$

c) 3

d) $\frac{50}{3}$

Capítulo 5

Estudo das funções

5.1 A noção de função

Com bastante frequência, encontramos situações que envolvem relações entre duas grandezas variáveis. Consideremos duas situações:

1^a: Uma caneta custa $R\$ \ 30,00$. Se representamos por x o número dessas canetas que queremos comprar e por y o preço correspondente a pagar, em reais, podemos ter a seguinte sentença:

$$y = 30x$$

Onde o preço y a pagar é dado em função do número x de canetas. A sentença acima é chamada lei de formação da função.

2^a: Márcia ligou seu computador à rede internacional de computadores *Internet*. Para fazer uso dessa rede, ela paga uma mensalidade fixa de $R\$ \ 30,00$ mais 15 centavos a cada minuto de uso. O valor a ser pago por Márcia ao final do mês depende, então, do tempo que ela gasta acessando a internet. Podemos estabelecer uma relação entre o tempo de utilização da rede (x) e o valor a ser pago (y) por Márcia, formando a seguinte função:

$$y = 30 + 0,15x$$

5.1.1 A função como relação entre dois conjuntos

Sendo A e B dois conjuntos não-vazios, uma relação entre A e B é chamada função quando a cada elemento x do conjunto A está associado um **único** elemento y do conjunto B.

Exemplo 5.1

Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} | -5 \leq y \leq 3\}$ e uma relação entre A e B expressa pela lei de formação $y = 2x - 1$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Podemos visualizar a representação dessa relação pelo diagrama de flechas (Figura 5.1).

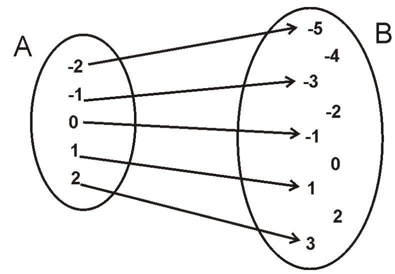


Figura 5.1: Representação da relação $y = 2x - 1$.

O conjunto A é chamado de **Domínio** da função, ou seja, o domínio da função é o conjunto de valores que a variável x pode assumir.

O conjunto B é chamado de **Contradomínio**. O conjunto dos valores da variável y que correspondem a um determinado valor de x é chamado de conjunto **Imagem** da função. Neste exemplo, o conjunto imagem da função é $Im = \{-5, -3, -1, 1, 3\}$.

5.2 Função do 1^o grau

Uma função é chamada de 1^o grau quando é definida pela fórmula matemática $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Observemos alguns exemplos que envolvem funções de 1^o grau.

Exemplo 5.2

Dada a função definida por $f(x) = -7x + 5$, determinar a imagem do número real -3.

Resolução:

Determinar a imagem do número -3 é o mesmo que encontrar $f(-3)$. Assim temos,

$f(-3) = -7.(-3) + 5 = 21 + 5 = 26$

Logo, 26 é a imagem do número -3 pela função.

Exemplo 5.3

Dada a função $y = 5 - 4x$, qual é o número real x cuja imagem pela função é $\frac{1}{10}$.

Resolução:

Para encontrarmos o número x que tem imagem $\frac{1}{10}$ basta fazermos

$$f(x) = \frac{1}{10}$$

$$5 - 4x = \frac{1}{10}$$

$$\frac{50 - 40x}{10} = \frac{1}{10}$$

$$50 - 40x = 1$$

$$-40x = -49$$

$$x = \frac{49}{40}$$

Logo, o número real procurado é $\frac{49}{40}$.

5.2.1 Gráfico da função do 1^o grau

Exemplo 5.4

Vamos fazer o esboço do gráfico da função $y = 2x - 3$.

Inicialmente, elaboramos uma tabela:

x	y
-1	-5
0	-3
1	-1

Em seguida, marcamos esses pontos no plano cartesiano e construímos uma reta.

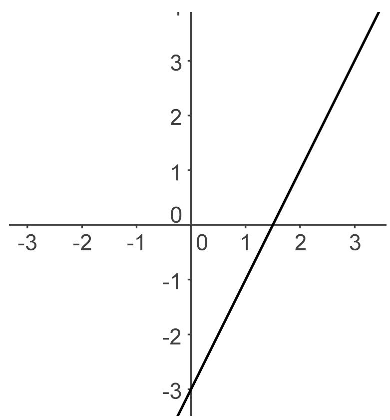


Figura 5.2: Gráfico da função $y = 2x - 3$.

Observações:

- O gráfico de uma função do 1^o grau é sempre uma **reta**.
- O gráfico da função $y = ax + b$ intercepta o eixo y no valor de b.
  Observe que no Exemplo 5.4, a reta intercepta o eixo y em -3 ($b = -3$).
- A raiz de uma função, ou zero da função, é o valor onde a reta intercepta o eixo x.
  Para encontrarmos a raiz de uma função $y = ax+b$, basta igualarmos a função a zero e determinarmos o valor de x.
  Vamos encontrar a raiz da função $y = 2x - 3$ do Exemplo 5.4.
  Então, $2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5$. Portanto, $\frac{3}{2}$ é onde a reta intercepta o eixo x.
- Na função $y = ax + b$, se $a > 0$ temos uma função **crescente**. Caso $a < 0$ a função é dita **decrescente**.

Exercícios

Exercício 5.1

Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e uma relação entre A e B dada pela fórmula $y = -x + 7$. Represente essa relação por meio de um diagrama de flechas e verifique se ela é ou não função.

Exercício 5.2

Qual é o número real x cuja imagem pela função $y = 1 - 9x$ é 19?

Exercício 5.3

Dada a função $y = \dfrac{x}{4} - 2$, determine a imagem pela função dos números:
a) 0 b) 4 c) -8

Exercício 5.4

Para cada função, determine as raízes, faça o esboço do gráfico e diga se é crescente ou decrescente:

a) $y = x - 6$

b) $y = -x - 4$

c) $y = 1 - 5x$

5.3 Função do 2^o grau

Uma função é dita do 2^o grau quando é definida pela fórmula matemática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Vamos estudar as características de uma função do 2^o grau através de alguns exemplos.

Exemplo 5.5

Façamos o esboço da função $f(x) = x^2 - 1$.

Resolução:

Inicialmente, vamos encontrar as raízes da função. Para isto, igualamos a função a zero. Logo temos,

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x = \pm 1$$

Assim, $-1, +1$ são as raízes da função $f(x) = x^2 - 1$, ou seja, o gráfico da função intercepta o eixo x em -1 e $+1$.

O gráfico de uma função do 2^o grau é sempre uma **parábola**. Ela possui um **vértice** ($V(x_v, y_v)$) que é determinado pelas seguintes fórmulas:

$x_v = \dfrac{-b}{2a}$	$y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$

Vamos determinar o vértice da função $f(x) = x^2 - 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4.(1).(-1) = 4$

$x_v = \dfrac{-0}{2.1} = 0$ $\qquad$ $y_v = \dfrac{-4}{4.1} = -1$

Portanto, o vértice da função $f(x) = x^2 - 1$ é $V(0, -1)$.

O gráfico da função do 2^o grau, intercepta o eixo y em c, logo, o gráfico da função $f(x) = x^2 - 1$, vai interceptar o eixo y em -1.

Também vale destacar que:

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima, se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo. Assim, no exemplo em questão, como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola será voltada para cima.

Logo, o esboço do gráfico da função está representado na Figura 5.3.

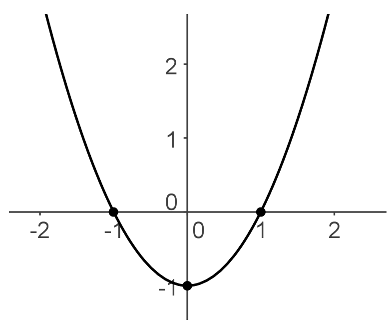


Figura 5.3: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 1$.

Observando o gráfico dessa função (Figura 5.3), podemos notar que ela possui um **valor mínimo**. Para calculá-lo, basta encontrar o y_v.

Exemplo 5.6

Determine as raízes, o vértice e faça o esboço do gráfico da função $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

Resolução:

Determinando as raízes:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

Logo, $a = -1$, $b = 3$ e $c = -2$. Assim,

$$\Delta = 3^2 - 4.(-1).(-2) = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2.(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$

$$x' = 1 \text{ e } x'' = 2$$

Portanto as raízes da função $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ são, 1 e 2.

Determinando o vértice:

$$x_v = \frac{-3}{2.(-1)} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$y_v = \frac{-1}{4.(-1)} - \frac{1}{4} = 0,25$$

Assim, como na função $f(x) = -x^2+3x-2$, $a < 0$, a concavidade da parábola é para baixo, ela possui um valor máximo que é $y_v = 0,25$.

Também destacamos que o gráfico intercepta o eixo y em $c = -2$. Com estes valores, podemos fazer o esboço do gráfico da função.

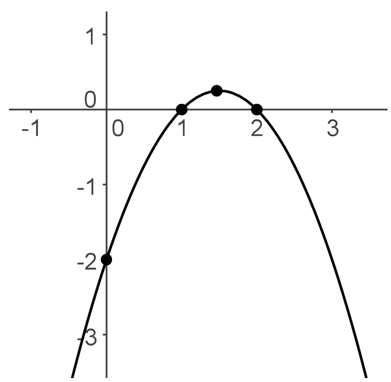


Figura 5.4: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

Nestes dois exemplos podemos notar que $\Delta > 0$, ou seja, que as funções possuem duas raízes reais diferentes. Vejamos um exemplo onde $\Delta = 0$ (duas raízes reais iguais) e um exemplo onde $\Delta < 0$ (não possui raízes reais).

Exemplo 5.7

Consideremos a função $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

Notemos que,

$$\Delta = (-2)^2 - 4.(1).(1) = 0$$

Logo, a função possui raízes reais iguais. Vamos determiná-las:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2.1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

Assim, o gráfico da função $g(x) = x^2 - 2x + 1$ intercepta o eixo x em apenas um ponto, como podemos observar na Figura 5.5.

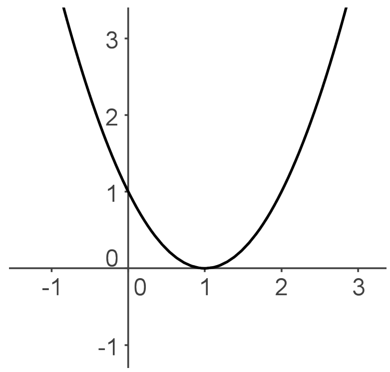


Figura 5.5: Gráfico da função $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

Exemplo 5.8

Consideremos agora a função $f(x) = x^2 - x + 1$.

Notemos que,

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.1 = -3 < 0$$

Portanto a função $f(x) = x^2 - x + 1$ não admite raízes reais, logo seu gráfico não intercepta o eixo x como podemos observar na Figura 5.6.

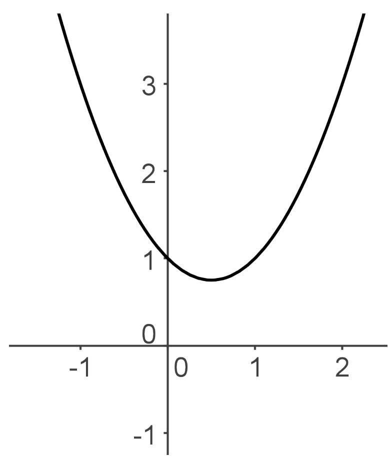


Figura 5.6: Gráfico da função $f(x) = x^2 - x + 1$.

Para finalizarmos nossos estudos de função do 2^o grau, vamos resolver dois problemas:

Exemplo 5.9

Qual a função representada pela parábola abaixo?

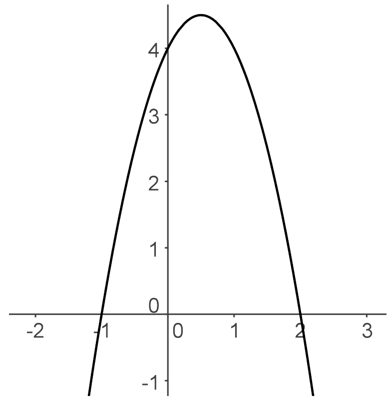


Figura 5.7: Gráfico de uma função do 2^o grau.

Observando o gráfico da função, podemos notar que $c = 4$, logo, temos uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + 4$. Para escrever a função que representa a parábola, basta encontrarmos os valores de a e b. Para isto, vamos utilizar as raízes da função, que são -1 e 2, como podemos observar no gráfico (Figura 5.7).

Assim,

$$\begin{array}{c|c} a.(-1)^2 + b.(-1) + 4 = 0 & a.(2)^2 + b.(2) + 4 = 0 \\ a - b + 4 = 0 & 4a + 2b + 4 = 0 \\ a - b = -4 & 4a + 2b = -4 \end{array}$$

Resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a - b & = & -4 \\ 4a + 2b & = & -4 \end{cases}$$

Obtemos $a = -2$ e $b = 2$.

Logo, a função procurada é $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$.

Exemplo 5.10

Um muro será usado como um dos lados de um galinheiro retangular, conforme a Figura 5.8. Para os outros lados será usado um rolo de 25 metros de tela de arame. Determinar quais devem ser as dimensões do galinheiro para que sua área seja máxima.

Figura 5.8: Galinheiro retangular.

Sendo as dimensões do galinheiro x e y, temos

$$x + 2y = 25$$

Isolando x, temos a seguinte equação: $x = 25 - 2y$.

A área do galinheiro será igual a $A = x.y$. Substituindo o $x = 25 - 2y$ obtemos a seguinte função:

$$A = x.y$$

$$A = (25 - 2y).y$$

$$A = 25y - 2y^2$$

É fácil concluir que a área será máxima para

$$y = \frac{-25}{2.(-2)} = \frac{-25}{-4} = 6,25$$

E assim temos,

$$x = 25 - 2y = 25 - 2.(6,25) = 12,5$$

Exercícios

Exercício 5.5

Faça o esboço do gráfico das seguintes funções:
a) $f(x) = x^2 + 4x + 4$
b) $f(x) = 2x^2 - 4x$
c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$
d) $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$
e) $f(x) = -x^2 + 5x + 7$

Exercício 5.6

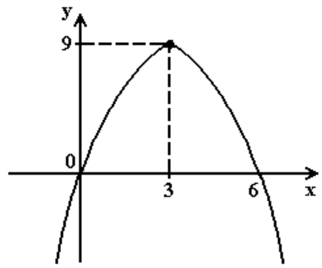
Determine o valor máximo ou mínimo de cada função:
a) $y = x^2 - 4x + 5$
b) $y = -x^2 + 6x - 5$
c) $y = x^2 + 2$

Exercício 5.7

Faça o gráfico da função$y = (x - 3)^2$.

Exercício 5.8

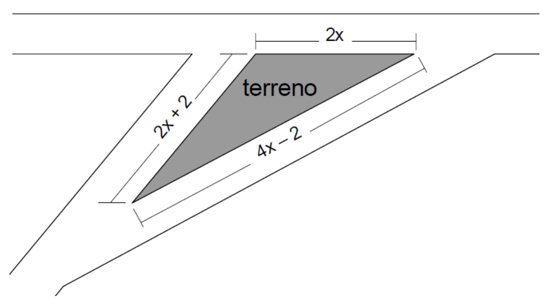
(UFPE) O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ é a parábola da figura a seguir. Determine os valores de a, b e c.



Testes

1) (CEFET/MG-2009) Na geometria plana, quando são conhecidos os três lados a, b e c de um triângulo qualquer, é possível calcular a área S sem necessidade da determinação de sua altura, utilizando a fórmula de Herão: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro.

Considere a figura abaixo de um terreno triangular cujos lados medem $4x - 2$, $2x + 2$ e $2x$, com área e perímetro de mesmo valor numérico.



A área desse terreno é igual a
a) 24
b) 26
c) 28
d) 30

2) (CEFET/MG-2009) Um produto com embalagem de $500ml$ está em promoção, no supermercado A, por $R\$\ 9,60$. Esse mesmo produto é vendido em embalagem de $250ml$, no supermercado B, por $R\$\ 7,68$. Se os $500ml$ forem adquiridos em B, paga-se a mais
a) 50%
b) 55%
c) 60%
d) 65%

3) (CEFET/MG-2009) Os números naturais x, y e z são os menores divisores, pelos quais se pode dividir 2700, 1080 e 4500, respectivamente, obtendo-se, desse modo, quocientes iguais. Assim sendo $(y.z) : x$ vale

a) 5

b) 6

c) 8

d) 10

4) (CEFET/MG-2009) Os gráficos das funções $f(x) = x(6 - 2x)$ e $g(x) = x - 3$ cruzam-se nos pontos P e Q do sistema cartesiano. Pode-se afirmar que P e Q pertencem, respectivamente, ao

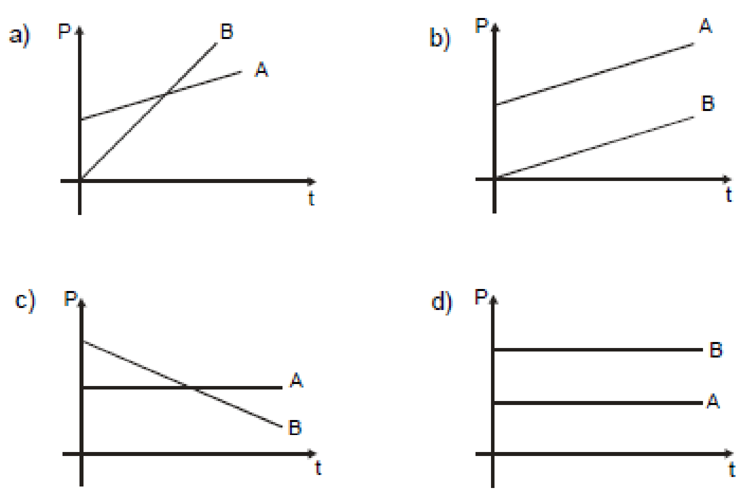
a) 1^o e 2^o quadrantes.

b) 3^o e 4^o quadrantes.

c) 3^o quadrante e eixo das abscissas.

d) eixo das ordenadas e 2^o quadrante.

5) (CEFET/MG-2008) A empresa A prestadora de serviços de digitação estabeleceu uma taxa fixa de $R\$ \ 20,00$ e mais $R\$ \ 10,00$ por hora de trabalho; enquanto a empresa B fixou seu preço de $R\$ \ 12,00$ apenas para hora trabalhada pelo mesmo serviço. O gráfico que melhor representa essa situação é



6)(CEFET/MG-2008) O gráfico da função $f(x) = \dfrac{4x^2}{9} - \dfrac{8x}{3} + 4$ intercepta o eixo das abscissas em P e o das ordenadas em Q, no sistema cartesiano de origem O, logo, a medida da hipotenusa PQ do triângulo POQ vale

a) 4

b) $\dfrac{9}{2}$

c) 5

d) $\dfrac{11}{2}$

7) (CEFET/MG-2010) O conjunto imagem da função $f(x) = -4 - 3x + x^2$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, está contido em

a) $A = \left\{ y \in \mathbb{R} | y \leq \dfrac{25}{4} \right\}$

b) $B = \left\{ y \in \mathbb{R} | y \geq \dfrac{25}{4} \right\}$

c) $C = \left\{ y \in \mathbb{R} | y \leq \dfrac{-25}{4} \right\}$

d) $D = \left\{ y \in \mathbb{R} | y \geq \dfrac{-25}{4} \right\}$

Capítulo 6

Grandezas proporcionais e regra de três

6.1 Grandezas proporcionais

6.1.1 Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas variáveis são diretamente proporcionais quando, aumentando ou diminuindo uma delas numa determinada razão, a outra aumenta ou diminui nessa mesma razão. As razões de cada elemento da primeira por cada elemento correspondente da segunda são iguais, ou seja, possuem o mesmo coeficiente de proporcionalidade.

Exemplo 6.1

Os números $3, 10$ e 8 são diretamente proporcionais aos números $6, 20$ e 16, nessa ordem, como podemos ver na seguinte proporção:

$$\frac{3}{6} = \frac{10}{20} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

6.1.2 Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando ou diminuindo uma delas numa determinada razão, a outra diminui ou aumenta na mesma razão. As razões de cada elemento da primeira pelo inverso de cada elemento correspondente da segunda são iguais.

Exemplo 6.2

Os números $9, 6$ e 2 são inversamente proporcionais aos números $4, 6$ e 18, nessa ordem, como podemos ver na seguinte proporção:

$$\frac{9}{\frac{1}{4}} = \frac{6}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{18}} = 36$$

Que resulta em:

$$9.4 = 6.6 = 2.18 = 36$$

As grandezas diretamente e inversamente proporcionais são aplicadas em problemas de divisões em partes proporcionais. Vejamos alguns problemas:

Exemplo 6.3

Duas pessoas, A e B, trabalharam numa determinada tarefa, sendo que A trabalhou durante 6 horas e B trabalhou durante 5 horas. Como elas irão dividir com justiça $R\$\ 660,00$ que serão pagos pela tarefa?

Chamamos de x o valor que A irá receber e y o valor que B irá receber. Então, $x+y=660$.

A divisão dos $R\$\ 660,00$ será em partes **diretamente** proporcionais às horas trabalhadas, então temos:

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{5}$$

Aplicando as propriedades de proporção, vista nas séries anteriores, temos:

$$\frac{x+y}{6+5}=\frac{x}{6}=\frac{y}{5}$$

$$\frac{660}{11}=\frac{x}{6}=\frac{y}{5}$$

Logo, temos duas equações a serem resolvidas,

$$\frac{660}{11}=\frac{x}{6} \qquad \text{e} \qquad \frac{660}{11}=\frac{y}{5}.$$

Resolvendo cada uma delas, encontramos os seguintes resultados:

$$x=360 \qquad \text{e} \qquad y=300$$

Assim, a pessoa A irá receber $R\$\ 360,00$ enquanto a pessoa B irá receber $R\$\ 300,00$.

Uma outra maneira de resolvermos este tipo de problema é, dividirmos os 660 reais em $6+5=11$ partes,

Logo, dividindo 660 por 11 temos

$$\frac{660}{11}=60$$

Assim, cada parte terá 60 reais.

Sabendo que cada trabalhador receberá conforme as horas trabalhadas, então o trabalhador A irá receber $6.60=360$ e o trabalhador B, $5.60=300$.

Vejamos agora como resolver problemas de divisão em partes inversamente proporcionais.

Exemplo 6.4

Duas pessoas A e B trabalham durante um mesmo período para fabricar e vender por $R\$\ 160,00$ um certo artigo. Se A chegou atrasada ao trabalho 3 dias e B, 5 dias, quanto cada uma irá receber?

Chamamos de x o valor que A irá receber e y o valor que B irá receber. Então, $x+y=160$.

A divisão dos $R\$\ 160,00$ será em partes **inversamente** proporcionais aos dias de atraso, então temos:

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{5}}$$

Aplicando as propriedades de proporção, temos:

$$\frac{x+y}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{5}}$$

Ou ainda,

$$\frac{160}{\frac{8}{15}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{5}}$$

Assim temos as seguintes equações a serem resolvidas,

$$\frac{160}{\frac{8}{15}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \qquad \text{e} \qquad \frac{160}{\frac{8}{15}} = \frac{y}{\frac{1}{5}}.$$

Resolvendo cada uma das equações acima, obtemos

$$x = 100 \qquad \text{e} \qquad y = 60.$$

Portanto, A irá receber $R\$ \ 100,00$ e B $R\$ \ 60,00$.
Uma outra maneira de resolvermos este problema é somarmos os números inversos, $\frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15}$.
Agora, dividimos 160 em 8 partes, assim

$$\frac{160}{8} = 20$$

Em seguida, multiplicamos 20 pelo número correspondente a cada número inverso, ou seja,

$\frac{1}{3}$, corresponde a $\frac{5}{15}$, portando, $20.5 = 100$.

$\frac{1}{5}$, corresponde a $\frac{3}{15}$, portanto, $20.3 = 60$.

Assim, A irá receber 100 reais e B, 60 reais.

Exemplo 6.5

Vamos dividir o número 130 em partes inversamente proporcionais a 2, 5 e 6, utilizando o método simplificado.

Primeiramente temos,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{15+6+5}{30} = \frac{26}{30}$$

Em seguida, dividimos 130 em 26 partes, logo

$$\frac{130}{26} = 5$$

Agora, basta multiplicarmos 5 pelas partes correspondentes aos números inversos.

$\frac{1}{2}$, corresponde a $\frac{15}{30}$, portando, $5.15 = 75$.

$\frac{1}{5}$, corresponde a $\frac{6}{30}$, portando, $5.6 = 30$.

$\frac{1}{6}$, corresponde a $\frac{5}{30}$, portando, $5.5 = 25$.

Exercícios

Exercício 6.1

Verificar se os números $18, 6$ e 3 são ou não, nessa ordem, diretamente proporcionais aos números $6, 2$ e 1.

Exercício 6.2

Verificar se os números $30, 24$ e 20 são ou não, nessa ordem, inversamente proporcionais aos números $4, 5$ e 6.

Exercício 6.3

Divida 720 em partes diretamente proporcionais a $4, 6$ e 8.

Exercício 6.4

Divida o número 260 em partes inversamente proporcionais aos números $2, 3$ e 4.

Exercício 6.5

Dois operários contratam um serviço por $R\$$ $180,00$. Como devem repartir essa quantia, se um trabalhou 7 horas e o outro 8 horas, sendo a divisão diretamente proporcional ao tempo de trabalho?

Exercício 6.6

Um pai deixou $R\$$ $2\ 870,00$ para serem divididos entre seus três filhos na razão inversa de suas idades: $8, 12$ e 28 anos. Quanto recebeu cada um?

Exercício 6.7

Um número foi dividido em partes diretamente proporcionais a 4 e 3. Sabendo que a parte correspondente a 4 era 2 000, encontre esse número.

6.2 Regra de três

Vamos ver algumas resoluções de problemas utilizando a regra de três simples e a regra de três composta.

Exemplo 6.6

Cinco metros de um tecido custam 80 reais. Quanto pagarei por 9 metros do mesmo tecido?

Primeiramente, montamos uma tabela com as variáveis do problema.

Comprimento (m)	Preço (R\$)
5	80
9	x

Podemos observar que, quanto mais se aumentar o comprimento, mais se aumenta o preço, portanto temos uma **regra de três direta**. Logo,

$$\frac{5}{9} = \frac{80}{x}$$
$$5x = 720$$
$$x = \frac{720}{5}$$
$$x = 144$$

Assim, irei pagar pelos 9 metros do tecido, 144 reais.

Exemplo 6.7

Um carro percorre um trecho com velocidade de 60 km/h em 40 min. Se ele percorresse o mesmo trecho com uma velocidade de 80 km/h, quanto tempo gastaria?

Montando a tabela temos,

Velocidade	Tempo
60	40
80	x

Podemos observar que, quando a velocidade aumenta, o tempo diminui. Portanto, temos uma **regra de três inversa**.

Logo,

$$\frac{80}{60} = \frac{40}{x}$$
$$80x = 2400$$
$$x = 30$$

Assim, o carro irá gastar 30 minutos.

Exemplo 6.8

Três operários, trabalhando 6 dias, produzem 400 peças. Quantas peças, desse mesmo tipo, produzirão 7 operários, trabalhando 9 dias?

Montando a tabela temos,

Operários	Dias	Peças
3	6	400
7	9	x

Neste exemplo, temos um problema de regra de três composta. Para resolvê-lo, basta verificarmos as grandezas que contém o x com as demais, para sabermos se são grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Vejamos:

Quando se aumenta o número de operários, o número de peças aumenta, portanto são diretamente proporcionais.

Quando se aumenta os dias trabalhados, o número de peças aumenta, portanto são diretamente proporcionais.

Assim,

$$\frac{3.6}{7.9} = \frac{400}{x}$$
$$\frac{18}{63} = \frac{400}{x}$$
$$18x = 25200$$
$$x = 1400$$

Logo, serão produzidas 1400 peças.

Exercícios

Exercício 6.8

Se 6 operários fazem certa obra em 10 dias, em quantos dias 20 operários fariam a mesma obra?

Exercício 6.9

Uma viagem foi feita em 12 dias, percorrendo-se 150 Km por dia. Quantos dias seriam necessários para fazer a mesma viagem, percorrendo-se 200 Km por dia?

Exercício 6.10

Três torneiras completamente abertas, enchem um tanque em $1h30min$. Quantas torneiras de mesma vazão seriam necessárias para encher o mesmo tanque em $54min$?

Exercício 6.11

Um ciclista percorre 120 Km em 2 dias, dirigindo 3 horas por dia. Em quantos dias percorrerá 500 Km, viajando 5 horas por dia?

Exercício 6.12

Numa fazenda, 3 cavalos consomem 210 Kg de alfafa durante 7 dias. Para alimentar 8 cavalos, durante 10 diais, quantos quilos de alfafa serão necessários?

Exercício 6.13

Seis digitadores preparam 720 páginas em 18 dias. Em quantos dias 8 digitadores, de mesma capacidade, prepararão 800 páginas?

Exercício 6.14

Um automóvel, com velocidade média de 60 km/h, roda 8 horas por dia e leva 6 dias para fazer certo percurso. Se a velocidade fosse 80 km/h e se rodasse 9 horas por dia, em quanto tempo ele faria o mesmo percurso?

Exercício 6.15

Uma torneira enche um tanque em 20 horas, com uma vazão de 1 litro por minuto. Quanto tempo será necessário para que duas torneiras, com vazão de 2 litros por minuto, encham o mesmo tanque?

Exercício 6.16

Um livro de 120 páginas, com 25 linhas, é impresso em 4 horas. Quantas horas seriam necessárias para imprimir um livro de 100 páginas com 30 linhas por página?

Capítulo 7

Geometria

7.1 Teorema de Tales

O teorema de Tales garante que um feixe de paralelas determina em duas transversais segmentos proporcionais.

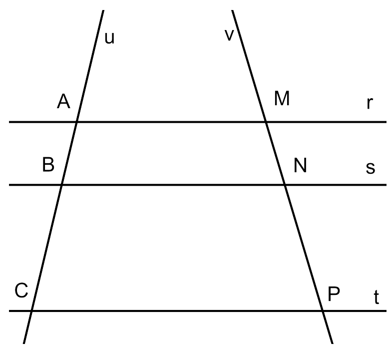


Figura 7.1: Teorema de Tales.

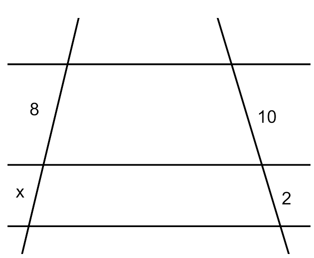
$$r//s//t \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

Podemos considerar, ainda, outras proporções a partir do teorema de Tales:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP} \qquad \frac{BC}{AC} = \frac{NP}{MP} \qquad \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$$

Exemplo 7.1

Na figura abaixo, determinar a medida de x indicada.



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{10}{2} = \frac{8}{x}$$

$$10x = 2.8$$

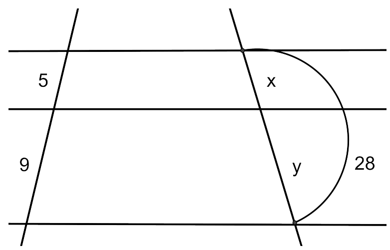
$$10x = 16$$

$$x = \frac{16}{10}$$

$$x = 1,6$$

Exemplo 7.2

Na Figura abaixo, determinar as medidas x e y.



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{5}{9} = \frac{x}{y}$$

Aplicando a propriedade da soma nas proporções, sabendo que $x + y = 28$:

$$\frac{5+9}{5} = \frac{x+y}{x}$$

$$\frac{14}{5} = \frac{28}{x}$$

$$14x = 5.28$$

$$14x = 140$$

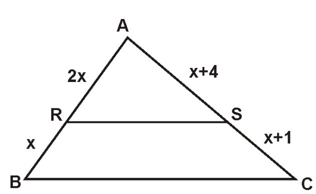
$$x = \frac{140}{14}$$

$$x = 10$$

Como $x + y = 28$, então $y = 28 - 10 = 18$.

Exemplo 7.3

Na figura, $\overline{RS} \mathbin{//} \overline{BC}$. Determinar a medida de x no triângulo abaixo.



Pelo teorema de Tales aplicado nos triângulos temos a seguinte relação

$$\frac{2x}{x} = \frac{x+4}{x+1}$$

$$2x(x+1) = x(x+4)$$

$$2x^2 + 2x = x^2 + 4x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

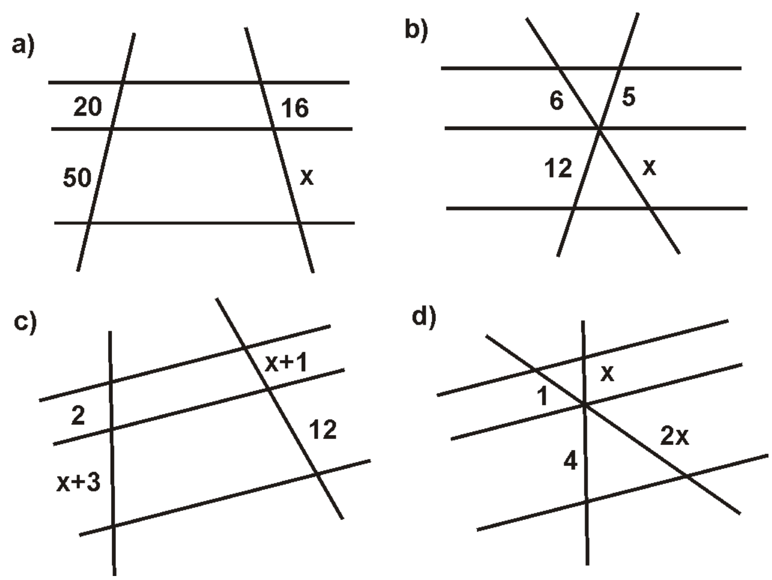
$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Como $x = 0$ não serve, então, $x = 2$.

Exercícios

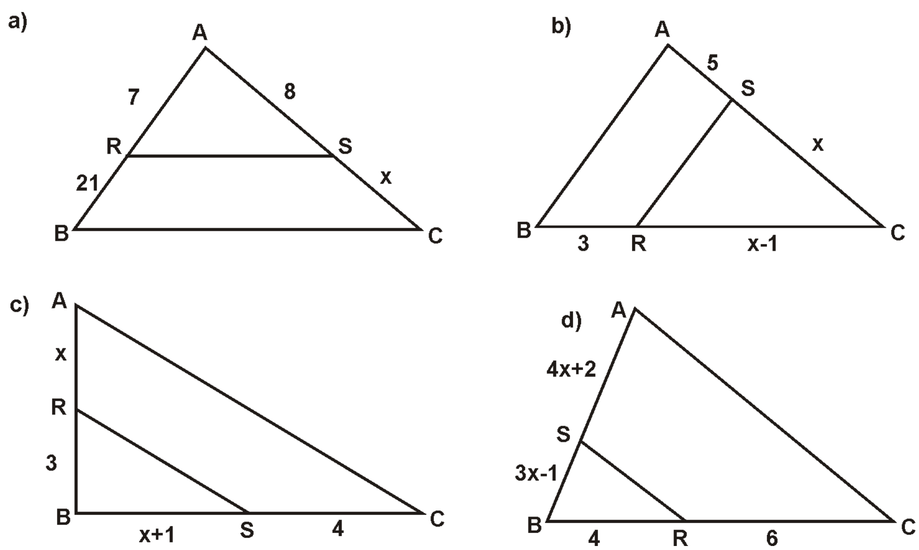
Exercício 7.1

Nas figuras, a // b // c, determine os valores de x.



Exercício 7.2

Determine a medida de x indicada:



7.2 Figuras semelhantes

Em geometria, duas figuras são semelhantes quando todos os ângulos correspondentes têm medidas iguais e quando todas as distâncias correspondentes são proporcionais.

Dois polígonos com o mesmo número de lados são semelhantes quando possuem os ângulos respectivamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

Vamos observar os quadriláteros da Figura 7.2,

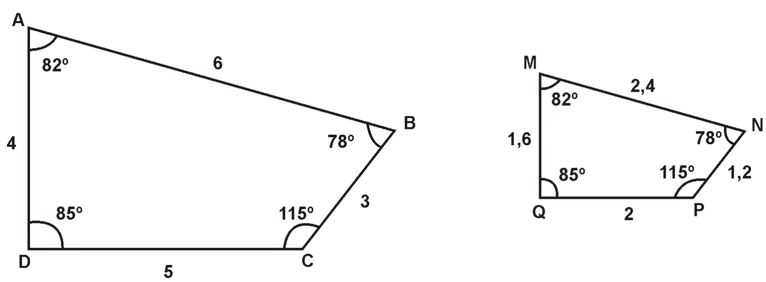


Figura 7.2: Quadriláteros semelhantes

Os ângulos correspondentes possuem a mesma medida: $\widehat{A} \cong \widehat{M}$, $\widehat{B} \cong \widehat{N}$, $\widehat{C} \cong \widehat{P}$, $\widehat{D} \cong \widehat{Q}$.

Os lados correspondentes são proporcionais.

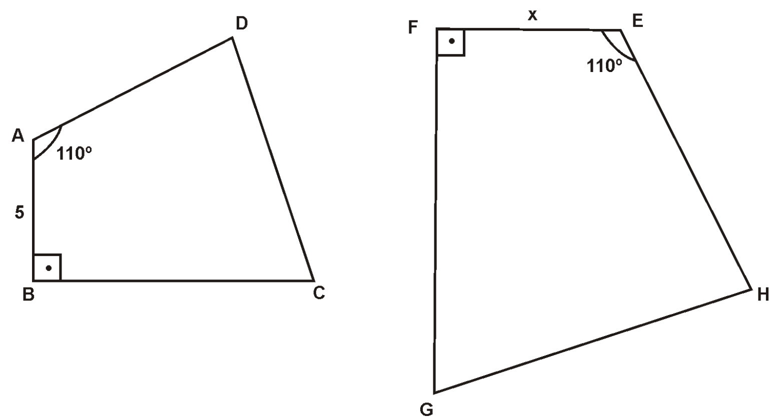
$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{AB}{MN} & = \dfrac{6}{2,4} = & 2,5 \\[2ex] \dfrac{BC}{NP} & = \dfrac{3}{1,2} = & 2,5 \\[2ex] \dfrac{CD}{PQ} & = \dfrac{5}{2} = & 2,5 \\[2ex] \dfrac{AD}{MQ} & = \dfrac{4}{1,6} = & 2,5 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{AD}{MQ} = 2,5$$

Podemos notar que a razão entre qualquer lado do quadrilátero $ABCD$ e o lado correspondente no quadrilátero $MNPQ$ é sempre a mesma, $2,5$. Dizemos, então, que $2,5$ é a **razão de semelhança** entre os polígonos.

Vamos resolver alguns problemas envolvendo semelhança de figuras planas.

Exemplo 7.4

Os quadriláteros $ABCD$ e $EFGH$ são semelhantes. O lado $\overline{AB}$ do primeiro correspondente ao lado $\overline{EF}$ do segundo. Sabendo que a razão de semelhança do primeiro para o segundo é de $\frac{2}{3}$, qual é a medida do lado $\overline{EF}$ do quadrilátero $EFGH$?



Como os quadriláteros são semelhantes, temos:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{5}{x} = \frac{2}{3}$$
$$2x = 15$$
$$x = \frac{15}{2}$$
$$x = 7,5$$

Logo, $EF = 7,5cm$.

7.2.1 Triângulos semelhantes

Dois triângulos são semelhantes quando têm os ângulos respectivamente congruentes ou quando os lados correspondentes são proporcionais.

Se dois triângulos são semelhantes, então os lados de um são proporcionais aos lados homólogos do outro.

Vejamos alguns exemplos nos quais aplicamos semelhança de triângulos.

Exemplo 7.5

Dada a figura abaixo, determinar os valores de x e y.

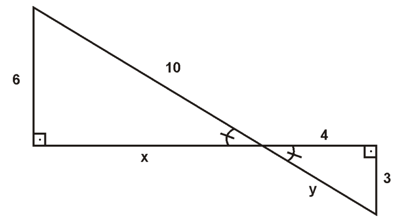


Figura 7.3: Triângulo do Exemplo 7.5

Como os triângulos têm dois ângulos congruentes, concluímos que eles são semelhantes. Logo,

$$\frac{6}{3} = \frac{x}{4} = \frac{10}{y}$$

Assim, resolvendo as duas equações

$$\frac{6}{3} = \frac{x}{4} \qquad \text{e} \qquad \frac{6}{3} = \frac{10}{y}$$

obtemos, $x = 8cm$ e $y = 5cm$.

Exemplo 7.6

Um homem de $1,80m$ de altura projeta uma sombra de $2,70m$ de comprimento no mesmo instante em que uma árvore projeta uma sombra de $9m$ de comprimento. Qual é a altura da árvore?

Podemos representar este problema conforme a figura abaixo.

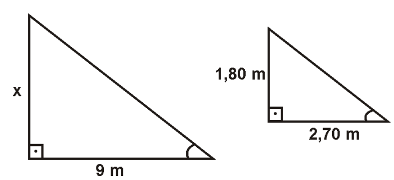


Figura 7.4: Esquema do Exemplo 7.6

Como os triângulos são semelhantes, temos

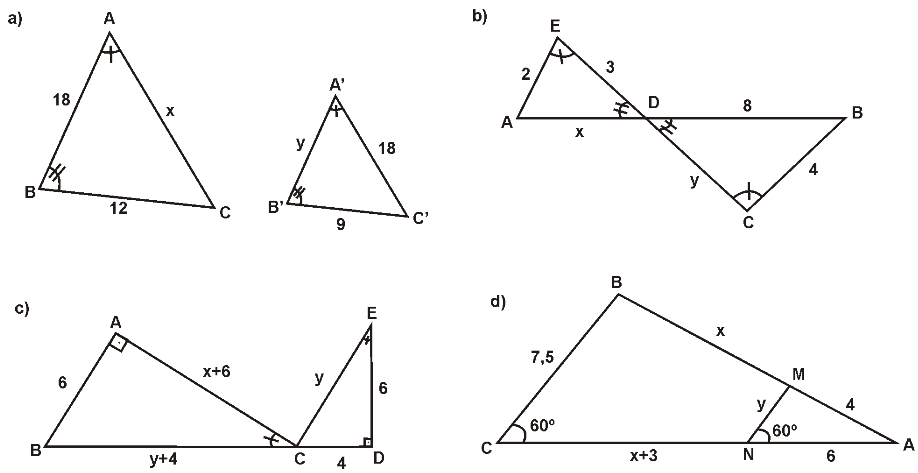
$$\frac{1,80}{x} = \frac{2,70}{9}$$
$$2,70x = 16,2$$
$$x = \frac{16,2}{2,70}$$
$$x = 6$$

Então, a altura da árvore é de $6m$.

Exercícios

Exercício 7.3

Determine o valor de x e y.



Exercício 7.4

Para determinar a largura de um lago, foi utilizado o esquema representado pela Figura 7.5. Qual é a largura do lago?

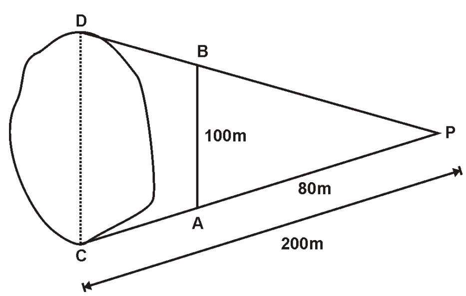


Figura 7.5: Esquema do exercício.

Exercício 7.5

Uma pessoa se encontra a $6,30m$ da base de um poste. Essa pessoa tem $1,80m$ de altura e projeta uma sombra de $2,70m$ de comprimento no solo. qual é a altura do poste?

Exercício 7.6

Que altura tem uma árvore que projeta uma sombra de $10m$ no mesmo instante em que uma pessoa de $1,60m$ de altura projeta uma sombra de $2,50m$?

Exercício 7.7

As bases de um trapézio medem $8cm$ e $12cm$, enquanto os lados não-paralelos medem $3cm$ e $5cm$. Prolongam-se os lados nao-paralelos até se encontrarem. Determine:

a) as medidas dos lados do menor triângulo assim obtido.

b) o perímetro desse triângulo.

c) o perímetro do maior triângulo obtido.

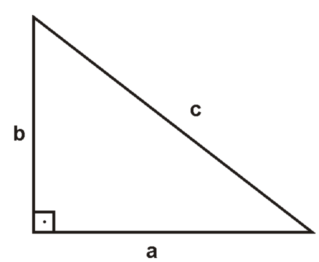
Exercício 7.8

A porta de entrada e a fachada de uma casa são figuras retangulares semelhantes e a razão de semelhança da altura da casa para a altura da porta é $\frac{5}{2}$. Se a altura da casa é $6m$, qual é a altura da porta?

7.3 Relações métricas no triângulo retângulo

7.3.1 Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

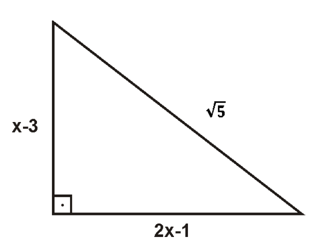


Então, pelo teorema de Pitágoras, tem-se

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Exemplo 7.7

No triângulo retângulo, determine a medida x.



Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$\sqrt{5}^2 = (x-3)^2 + (2x-1)^2$$

$$5 = x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 4x + 1$$

$$5x^2 - 10x + 5 = 0$$

Resolvendo a equação do 2^o grau, temos:

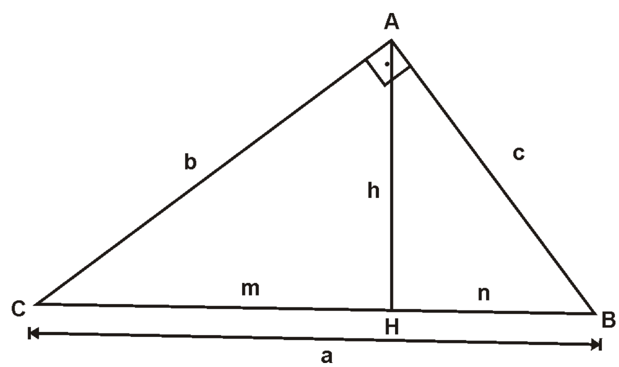
$$\Delta = (-10)^2 - 4.(5).(5) = 100 - 100 = 0$$

Assim,

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2.5} = \frac{10}{10} = 1$$

7.3.2 Outras relações métricas no triângulo retângulo

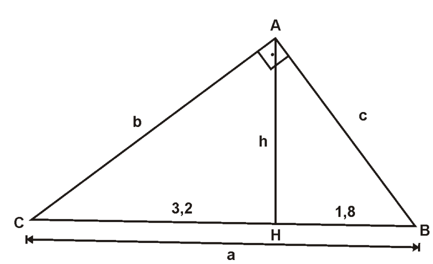
Dado o triângulo retângulo ABC. Sabendo que AH é a altura relativa à base (hipotenusa), pode-se mostrar as seguintes relações métricas.



$b^2 = ma$	$c^2 = na$
$h^2 = mn$	$bc = ah$
$a = m + n$	$a^2 = b^2 + c^2$

Exemplo 7.8

No triângulo retângulo, determinar as medidas a, h, b e c indicadas.



$a = m + n$	$h^2 = mn$	$b^2 = am$	$c^2 = an$
$a = 3,2 + 1,8$	$h^2 = 1,8.3,2$	$b^2 = 5.3,2$	$c^2 = 5.1,8$
$a = 5cm$	$h^2 = 5,76$	$b^2 = 16$	$c^2 = 9$
	$h = \sqrt{5,76}$	$b = \sqrt{16}$	$c = \sqrt{9}$
	$h = 2,4cm$	$b = 4cm$	$c = 3cm$

Exercícios

Exercício 7.9

Em um triângulo retângulo, os catetos medem $7cm$ e $24cm$. Determine:

a) a medida da hipotenusa.

b) a medida da altura relativa à hipotenusa.

Exercício 7.10

Em um triângulo retângulo, um cateto mede $10cm$ e sua projeção sobre a hipotenusa mede $5cm$. Nessas condições, determine:

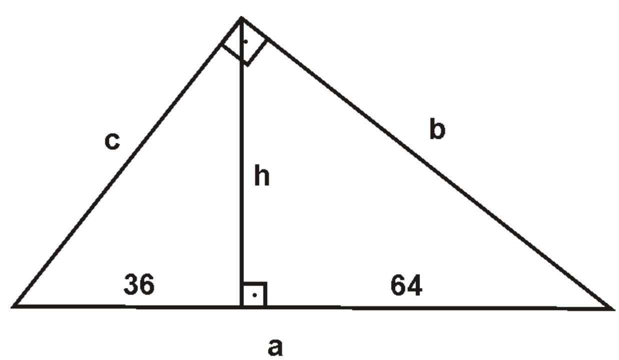
a) a medida da hipotenusa.

b) a medida do outro cateto.

c) a medida da altura relativa à hipotenusa.

Exercício 7.11

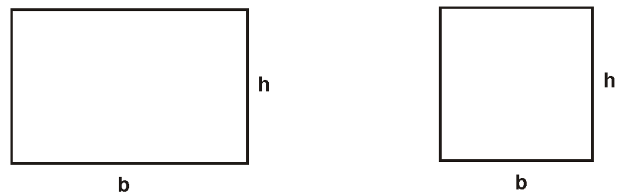
Determine as medidas a, h, b e c indicadas no triângulo retângulo.



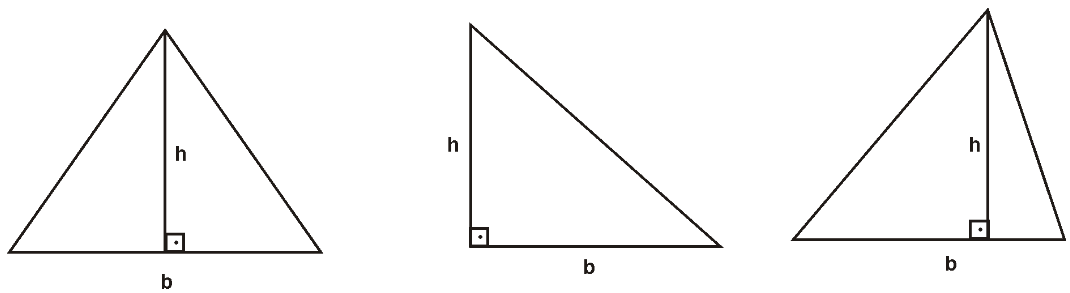
7.4 Calculando a área de algumas figuras geométricas

Vamos relembrar como se calcular as áreas de algumas figuras geométricas.

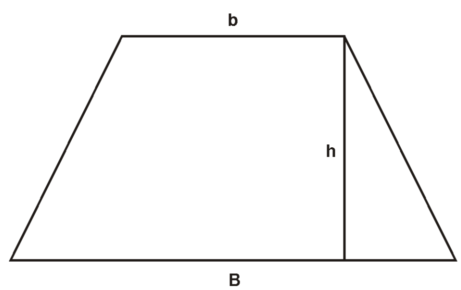
Área de um retângulo e de um quadrado: $A = b.h$



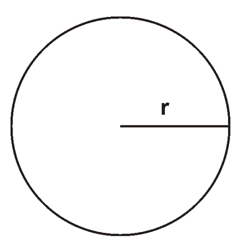
Área de um triângulo: $A = \dfrac{b.h}{2}$



Área de um trapézio: $A = \dfrac{h.(B+b)}{2}$



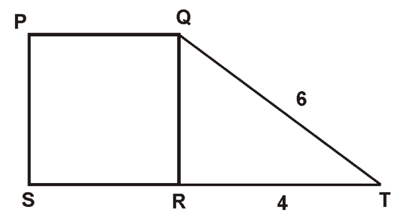
Área de um círculo: $A = \pi r^2$



Exercícios

Exercício 7.12

Determine a área da região quadrada $PQRS$ na figura.



Exercício 7.13

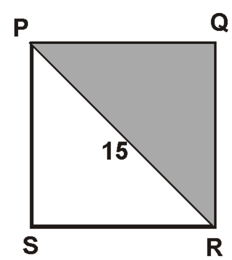
Para ladrilhar uma cozinha de $20m^2$ são necessárias 80 peças quadradas de cerâmica. Determine:

a) a área de cada peça, em metros quadrados;

b) o perímetro de cada peça, em metros.

Exercício 7.14

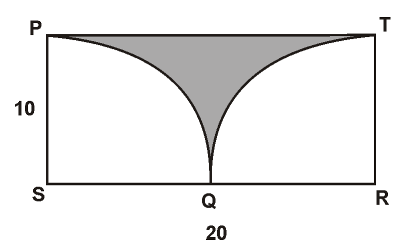
Determine a área aproximada da região colorida sendo $PQRS$ um quadrado.



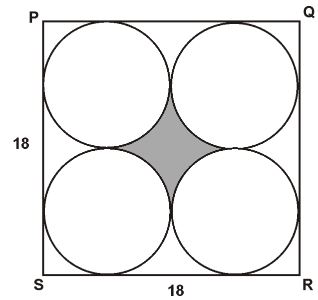
Exercício 7.15

Calcule a área da parte pintada de cada figura.

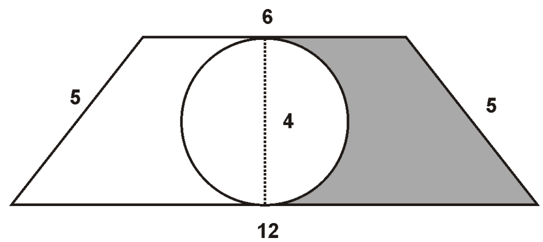
a) $PTRS$ é um retângulo e Q é o ponto médio de $\overline{SR}$.



b) $PQRS$ é um quadrado e as circunferências têm o mesmo raio.

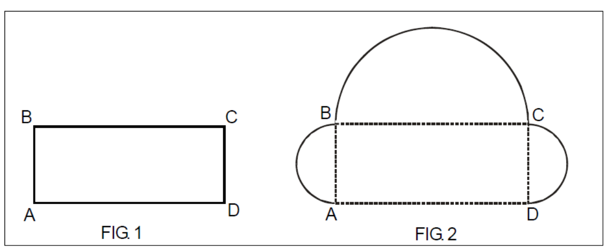


c)



Testes

1) (CEFET/MG-2008) Uma piscina foi projetada em forma de um retângulo cujo comprimento é o triplo da largura, conforme FIG. 1. Antes de ser construída, seu proprietário decidiu modificá-la, conforme FIG. 2, na qual AB, BC e CD são diâmetros dos semicírculos anexados. Se o preço da construção for



proporcional ao seu perímetro, e o custo da primeira piscina com 16 m de comprimento for de $R\$ \ 1\,888,00$, então o segundo projeto custará (use: $\pi = 3,14$)

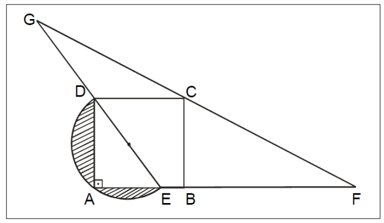
a) $R\$ \ 2\,465,20$

b) $R\$ \ 2\,590,40$

c) $R\$ \ 2\,535,80$

d) $R\$ \ 2\,560,60$

2)(CEFET/MG-2008) Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado e BF o prolongamento de AB.



Se $EF = 8$, $EB = 1$, DE diâmetro do semicírculo e D ponto médio de EG, então a área hachurada é igual a

a) $\dfrac{150 - 24\pi}{12}$ b) $\dfrac{5\pi - 12}{8}$

c) $\dfrac{2\pi - 4}{5}$ d) $\dfrac{25\pi - 48}{8}$

3)(CEFET/MG-2009) O lucro de uma empresa, para cada quantidade x de unidades vendidas, é expresso por $L(x) = 10x - 3$. Se esse lucro não foi inferior a 5 e não ultrapassou 55 unidades monetárias, então, a quantidade de unidades produzidas pertence ao intervalo

a) $[1, 5]$
b) $[3, 8]$
c) $[5, 9]$
d) $[2, 10]$

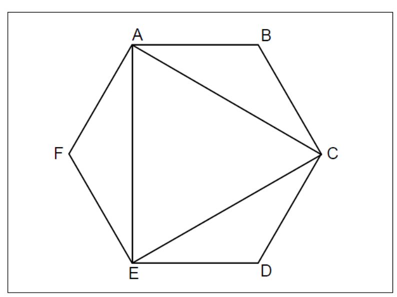
4)(CEFET/MG-2009) A razão entre o perímetro do hexágono regular $ABCDEF$ e o perímetro do triângulo ACE, nessa ordem, é

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

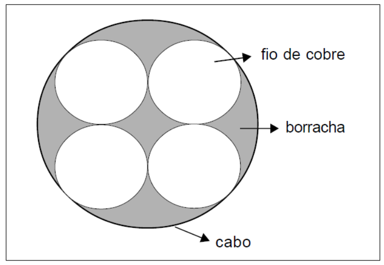
c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

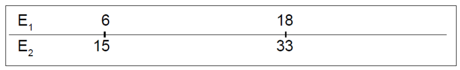


5)(CEFET/MG-2009) A figura mostra o corte transversal de um cabo de alta tensão, no formato cilíndrico, composto de borracha em sua composição, e por um agrupamento de quatro fios de cobre, também cilíndricos e iguais entre si. Sabendo-se que as cinco circunfêrencias são tangentes entre si e que a soma dos raios dos quatro fios é 8, o raio do cabo vale

a) $2(\sqrt{2} + 1)$
b) $8(\sqrt{3} + 1)$
c) $3(\sqrt{2} + 1)$
d) $3(\sqrt{3} + 2)$



6) (CEFET/MG-2009) Sobre um mesmo segmento, são marcadas as temperaturas de duas escalas termométricas conforme mostra a figura.



Se a temperatura em E_1 for ...... , então, a correspondente em E_2 será .... A opção que completa, corretamente, as lacunas é

a) 0 e 7.

b) 10 e 21.

c) 15 e 24.

d) 30 e 75.

Referências bibliográficas

- DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática.** São Paulo: Ática, 2004.
- GUELLI, Oscar. **Matemática: uma aventura do pensamento.** São Paulo: Ática, 1999.
- MORI, Iracema e ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática: idéias e desafios.** São Paulo: Saraiva, 2000.
- IEZZI, Gelson e MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Vol 1. Editora Atual.
- GIOVANNI, Jose Ruy, CASTRUCCI, Benedito e GIOVANNI JR., José Ruy. **A Conquista da Matemática.**, Editora Ftp, 2002.